بنام خدا

سیستم‌های کنترل دیجیتال

پیش‌نیاز: سیستم‌های کنترل خطی + برنامه‌نویسی میکرو + متلب

هدف: آشنائی با روشهای طراحی و پیاده‌سازی کنترل کننده‌های دیجیتال با رویکردهای پایه و پیشرفته‌تر

سرفصل درس:

- معرفی سیستمهای کنترل دیجیتال
- گذر از پیوسته به گسسته، اجزاء سیستمهای کنترل دیجیتال
- تبدیل Z و ارتباط آن با تبدیل لاپلاس
- معادلات تفاضلی برای تحلیل حوزه Z - طراحی کنترل کننده PID دیجیتال
- طراحی سیستم‌های کنترل زمان گسسته با روشهای تبدیل
  - طراحی پیوسته و تبدیل به گسسته، مکان هندسی ریشه‌ها، پاسخ فرکانسی، روش تحلیلی
- روشهای طراحی در فضای حالت - کنترل غیرخطی
  - پایداری لیاپانوف - فیلتر کالمن - کنترل کننده فیدبک حالت کامل
- آشنایی با روشهای پیاده‌سازی کنترل کننده‌های دیجیتال

مراجع: ۱- سیستم‌های کنترل دیجیتال جلد ۱ تألیف اوگاتا
۲- کنترل دیجیتال سیستم‌های دینامیکی تألیف فرانکلین
۳- سیستمهای غیرخطی دکتر حسن خلیل

ارزیابی
تمرین ۱۰٪
میان‌ترم ۱۵ - ۲۰٪
پروژه ۵ - ۱۵٪
کوئیز ۵ - ۱۰٪
پایان‌ترم ۵۰ - ۶۰٪
حضور و غیاب ۵٪

Subject:

Year. Month. Date. ( )

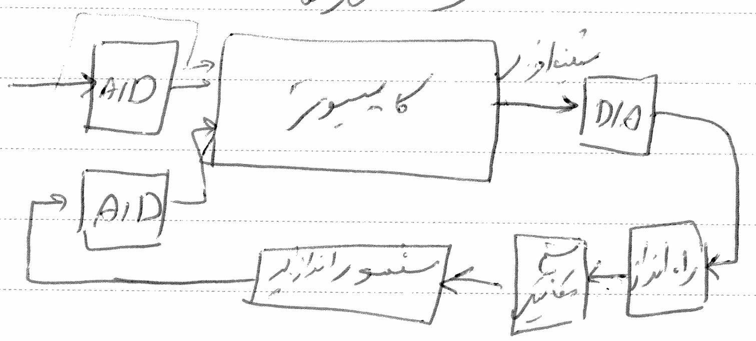
Subject :
Year . Month . Date . ( )

آشنائی با سیستم‌های کنترل زمان گسسته

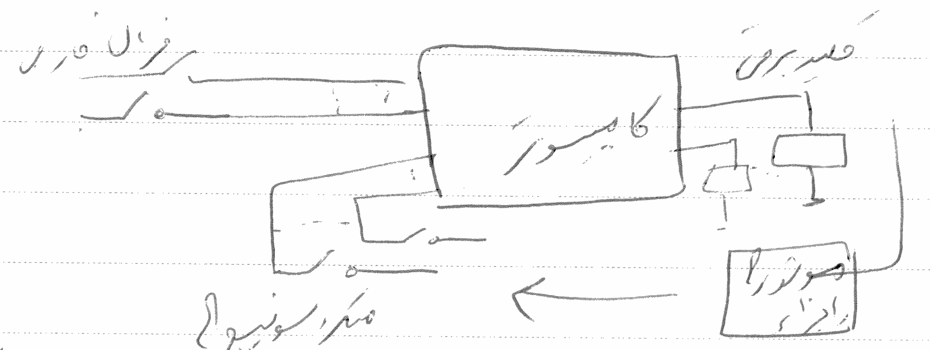
مقدمه کنترل و

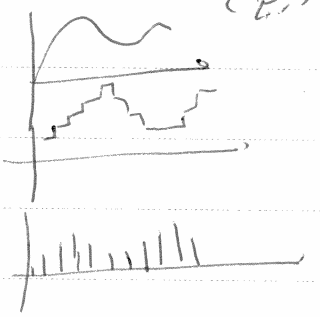
تاریخچه کنترل دیجیتال ← سیستم‌های دیجیتال ← ارزان
← کوچک

کاربرد کامپیوتر ← استفاده در شبیه‌سازی سیستم‌ها
← پیاده‌سازی کنترل کننده‌ها



- کنترل دیجیتال
- لاجیک کنترل





انواع سیگنال: زمان پیوسته ← آنالوگ
← ~~دیجیتال~~ کوانتیزه شد.

زمان گسسته کوانتیزه شد دیجیتال

مزایای کنترل دیجیتال: ۱- پردازش داده در کنترل کننده‌های دیجیتال بسیار ساده است. محاسبات کنترلی پیچیده را می‌توان به سهولت انجام داد.

۲- برنامه‌های کنترلی را می‌توان به سادگی تغییر داد.

۳- از دیدگاه بویژه داخلی و اثرات دمایی کنترل کننده‌های دیجیتال برتری دارند

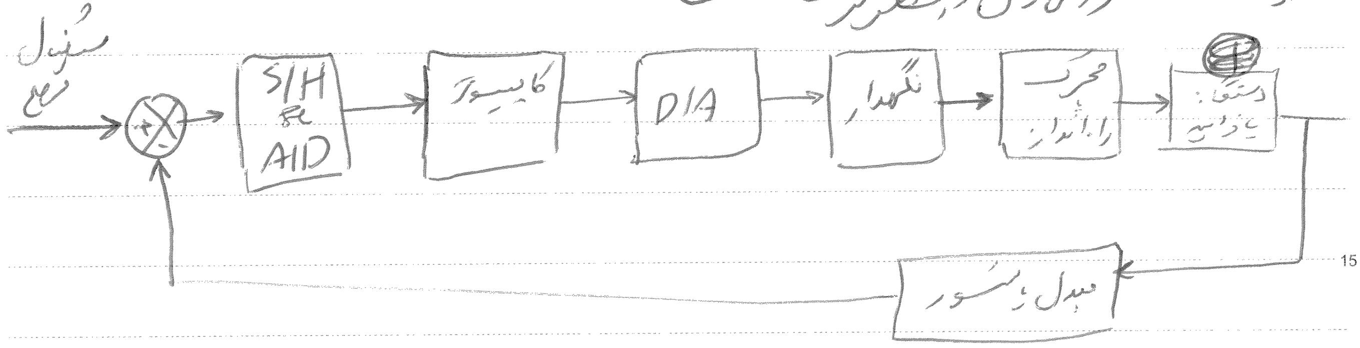
معایب کنترل کننده‌های دیجیتال

۱- فرآیندهای نمونه برداری و کوانتیزه کردن، خطاهای بیشتری را ایجاد می‌کند که عملکرد را تنزل می‌دهند.

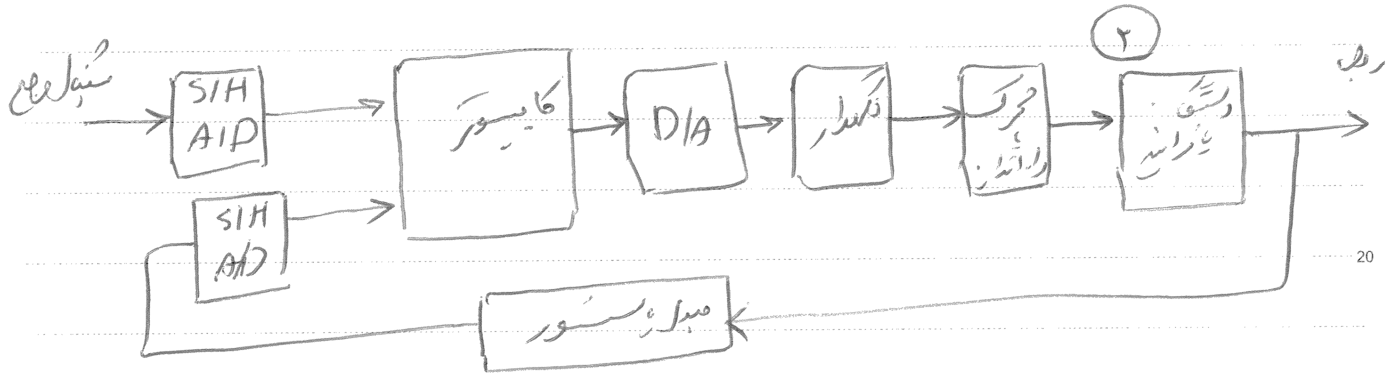
۲- طراحی کنترل کننده‌های دیجیتال برای جبران ضعف کنترلی به‌مراتب پیچیده‌تر از طراحی کنترل کننده‌های آنالوگ در یک سطح عملکرد معادل می‌باشد.

یک سیستم کنترل دیجیتال ساده

دو ساختار را می‌توان در نظر گرفت: ①



②



نمونه‌بردار، نگهدار و مبدل آنالوگ به دیجیتال معمولاً با هم در یک IC قرار دارند

آشنایی با چند نمونه A/D لازم است. ADC 804

[illegible] 808

مکانیزم عملکرد A/D

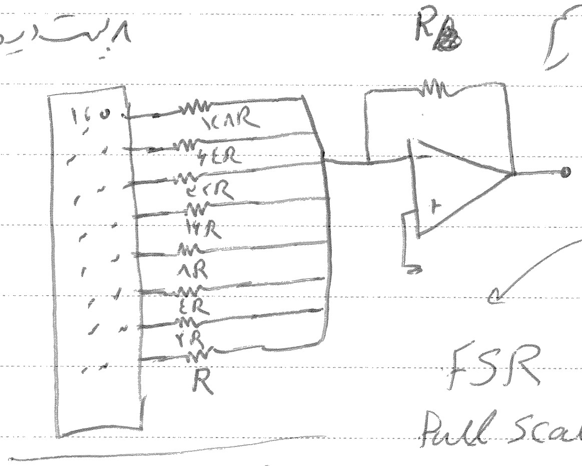
آشنایی با D/A

DAC 0800

Subject :
Year . Month . Date . ( )

قبل از شناسایی A/D ابتدا D/A را معرفی کنیم

۸ بیت دیجیتال



نوعی دیگر مدار R-2R هم است که بیت کم ارزش را دقیق‌تر دارد

$0-(-5)$

دقت $\frac{10}{256} \approx 0.04\,mv \approx \frac{5}{256} = 0.02\,mv$ D/A

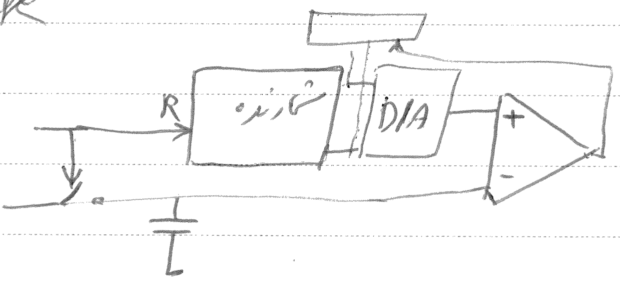
FSR
Full Scale Range

LSB
least significant bit

R-2R

ساختار A/D

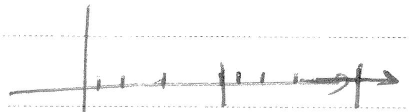
- شمارنده
- تقریب متوالی (تقریب‌های متوالی)
- موازی 2^n مقایسه کننده



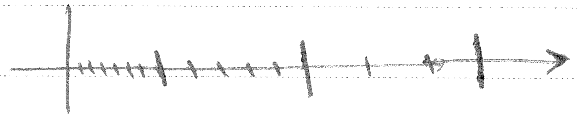
انواع روشهای نمونه برداری

۱- نمونه برداری متناوب

۲- نمونه برداری از مرتبه مکرر ثابت $t_{k+1}-t_k$ multiple-order sampling

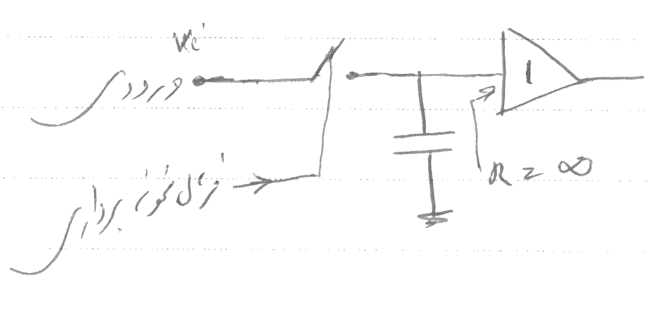


۳- نمونه برداری با نرخ مکرر
multiple-rate-sampling



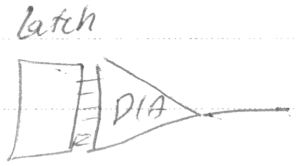
۴- نمونه برداری تصادفی

مدار نمونه بردار



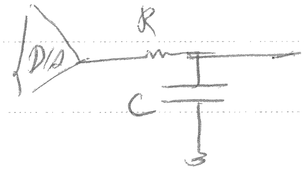
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مدار نگهدار:

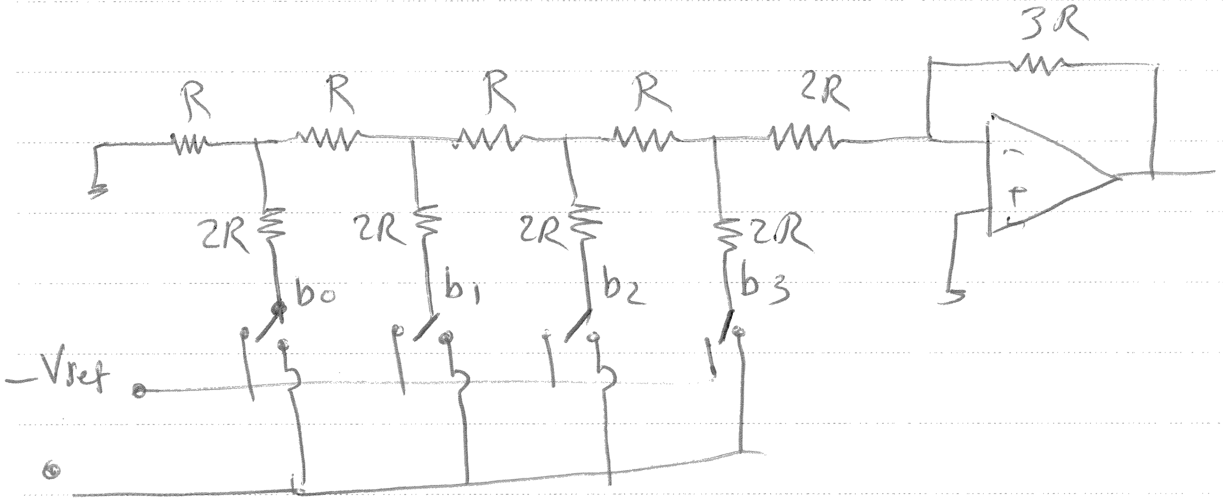


سالن تر کن نگهدارند

74373
یا بوت یک مدار



مبدل R-2R D/A



جمع بندی انتهای فصل

در حال حاضر کنترل دیجیتال فراگیر شده و جای کنترل آنالوگ را گرفته

نکاتی در انتخاب T: انتخاب فرکانس نمونه برداری با توجه به ثابت زمانی سیستم

تاشدن یا اختلاط فرکانسی: اگر فرکانس نمونه برداری بالا نباشد هستی اختلاف فرکانس سیگنال از ... کم
به علت جابجایی طیف ها، تداخل خواهد شد Frequency folding

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تمرین فصل اول

تمرین

برنامه ای بنویسید که یک سیگنال بین ۱۰ تا ۱۰۰ هرتز را از یک ورودی آنالوگ بخواند (توسط A/D) و توسط سه عدد D/A سه خروجی آنالوگ را با فرکانس $F/2$ ، F ، $2F$ طراحی نمایید.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

فصل ۲ تبدیل Z

معادل تبدیل لاپلاس در سیستم‌های پیوسته ← تبدیل Z در سیستم‌های گسسته تعریف می‌شود.

تبدیل Z و عکس تبدیل Z، مشخصات تبدیل Z

$$X(Z) = \mathcal{Z}(x(t)) = \mathcal{Z}(x(KT)) = \mathcal{Z}[x(K)]$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} x(KT) Z^{-K} = \sum_{K=0} x(K) Z^{-K}$$

one-sided z transform ← تبدیل Z یکطرفه

$$X(Z) = \mathcal{Z}(x(t)) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x(k) Z^{-K}$$

two-sided z transform ← تبدیل دوطرفه

عکس تبدیل Z

$$x(KT) = x(K) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(Z) Z^{K-1} dZ$$

C دایره‌ای است که تمام قطبهای $X(Z)$ درون آن قرار دارد.

(۱) $$X(Z) = \frac{b_0 Z^m + b_1 Z^{m-1} + \cdots b_m}{Z^n + a_1 Z^{n-1} + \cdots a_n} = \frac{b_0 (Z-Z_1)(Z-Z_2)\cdots(Z-Z_m)}{(Z-P_1)(Z-P_2)\cdots(Z-P_n)}$$ (۲)

(۳) برحسب Z^{-1}

$$= \frac{b_0 Z^{-(n-m)} + b_1 Z^{-(n-m+1)} + \cdots b_m Z^{-n}}{1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \cdots a_n Z^{-n}}$$

Z^{-1} به عنوان اپراتور تأخیر واحد معرفی خواهد شد.

برای تعیین قطبها و صفرها فرم (۲) مناسب است

$$X(z) = \frac{z^2 + 0.5z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z(z+0.5)}{(z+1)(z+2)} \Rightarrow P_1 = -1, P_2 = -2, \quad z_1 = 0, z_2 = -0.5$$

اگر $X(z)$ را بصورت $X(z^{-1})$ بنویسیم خواهیم داشت

$$X(z)=\frac{1+0.5z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{1+0.5z^{-1}}{(1+z^{-1})(1+2z^{-1})}$$

در اینصورت صفر و مقدار صفر واضح نیست

تبدیل z توابع مقدماتی

تابع پله

$$x(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}\;\longrightarrow\; u(k)=\begin{cases}1 & k=0,1,2,\dots\\ 0 & k<0\end{cases}$$

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k}=1+z^{-1}+z^{-2}+\dots=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

این سری زمانی همگراست $|z|>1$ دراینصورت تابع وجود دارد و لازم نیست در تمام نواحی همگرا باشد. این اپراتور یک اپراتور سمبلیک است

تابع شیب واحد

$$x(t)=\begin{cases}t & 0\leq t\\ 0 & t<0\end{cases}\;\longrightarrow\; x(k)=\begin{cases}kT & k=0,1,2,\dots\\ 0 & k<0\end{cases}$$

$$X(z)=\mathcal{Z}(x(t))=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}=T\sum_{k=0}^{\infty}kz^{-k}$$

$$=T\left(z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+\dots\right)=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}=\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

تابع چندجمله‌ای a^k

$$x(k)=\begin{cases}a^k & k=0,1,2,\dots\\ 0 & k<0\end{cases}$$

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a^kz^{-k}=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\dots+a^nz^{-n}+\dots$$

$$=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$

باید $|z|>|a|$

نقاط بیرون دایره‌ای به شعاع $|a|$

Subject :

Year . Month . Date . ( )

تابع نمایی

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$X(Z) = Z(e^{-at}) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) Z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} Z^{-k}$$

$$= 1 - e^{-aT} Z^{-1} + e^{-2aT} Z^{-2} + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-aT} Z^{-1}} = \frac{Z}{Z - e^{-aT}}$$

تابع سینوسی

$$x(t) = \begin{cases} \sin \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

می دانیم

$$Z(e^{-at}) = \frac{1}{1 - e^{-aT} Z^{-1}}$$

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$X(Z) = Z[\sin \omega t] = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T} Z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} Z^{-1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2j} \frac{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}) Z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) Z^{-1} + Z^{-2}} = \frac{Z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2 Z^{-1} \cos \omega T + Z^{-2}}$$

$$= \frac{Z \sin \omega T}{Z^2 - 2 Z \cos \omega T + 1}$$

تابع کسینوسی

$$x(t) = \begin{cases} \cos \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$X(Z) = \frac{Z^2 - Z \cos \omega T}{Z^2 - 2 Z \cos \omega T + 1}$$

تابع سینوسی میرا

$$x(t) = e^{-at} \sin \omega t \qquad t \geq 0$$

$$X(Z) = \frac{e^{-aT} Z \sin \omega T}{Z^2 - 2 e^{-aT} Z \cos \omega T + e^{-2aT}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

محاسبه تبدیل Z یک تابع تبدیل لاپلاس $X(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

از دو روش می‌توان این کار را انجام داد.

الف) محاسبه $x(t)$ و سپس محاسبه $X(Z)$

ب) محاسبه مستقیم $X(Z)$ از روی $X(s)$

$$x(t) = 1 - e^{-t} \quad t \geq 0$$

$$\hookrightarrow X(Z) = \frac{1}{1-Z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T}Z^{-1}}$$

$$= \frac{(1-e^{-T})Z}{(Z-1)(Z-e^{-T})}$$

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \Rightarrow X(Z) = \frac{1}{1-Z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T}Z^{-1}}$$

خواص و قضایای مهم تبدیل Z

ضرب در یک مقدار ثابت: اگر $X(Z)$ تبدیل Z $x(t)$ باشد در این صورت

$$Z(a\,x(t)) = a\,Z(x(t)) = a\,X(Z)$$

که در آن a یک ثابت است

خطی بودن تبدیل Z:

$$x(k) = \alpha f(k) + \beta g(k) \rightarrow$$
$$X(Z) = \alpha F(Z) + \beta G(Z)$$

ضرب در a^k:

$$Z[a^k x(k)] = X(a^{-1}Z)$$

قضیه انتقال حقیقی

$$Z[x(t-nT)] = Z^{-n}X(Z)$$

$$Z[x(t+nT)] = Z^{n}\left[X(Z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)Z^{-k}\right]$$

مثال ۲-۴ تبدیل Z $x(k+1)$ ، $x(k+n)$ و $x(k-n)$ را بدست آورید

$$Z[x(k+1)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1) Z^{-k} \qquad k+1 = k' \to k=0 \to k'=1$$

$$= \sum_{k'=1}^{\infty} x(k') Z^{-k'+1} = Z\left[\sum_{k'=1}^{\infty} x(k') Z^{-k'} - x(0) + x(0)\right]$$

$$= Z\left[\sum_{k'=0}^{\infty} x(k') Z^{-k'} - x(0)\right] = Z X(Z) - Z x(0)$$

$$Z[x(k+n)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+n) Z^{-k} \qquad k+n = k' \Rightarrow k=0 \to k'=n, \quad k = k'-n$$

$$= \sum_{k'=n}^{\infty} x(k') Z^{-k'+n} = Z^{n}\left[\sum_{k'=n}^{\infty} x(k') Z^{-k'} + \sum_{k=0}^{n-1} x(k) Z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x(k) Z^{-k}\right]$$

$$= Z^{n} X(Z) - Z^{n} \sum_{k=0}^{n-1} x(k) Z^{-k}$$

$$= Z^{n} X(Z) - Z^{n} x(0) - Z^{n-1} x(1) - Z^{n-2} x(2) - Z x(n-1)$$

$$Z[x(k-n)] = Z^{-n} X(Z)$$

مثال ۲-۵

$$Z[u(t-T)] = Z^{-1} \times \frac{1}{1-Z^{-1}} = \frac{Z^{-1}}{1-Z^{-1}}$$

$$Z[u(t-4T)] = Z^{-4} \times \frac{1}{1-Z^{-1}} = \frac{Z^{-4}}{1-Z^{-1}}$$

مثال ۲-۶

$$f(a) = \begin{cases} a^{k-1} & k=1,2,\dots \\ 0 & k \leq 0 \end{cases} \to Z(f(k-1)) = Z^{-1} F(Z) = \frac{Z^{-1}}{1-aZ^{-1}}$$

تفاضلهای معکوس و مستقیم (ص ۲۴۵)

$$\nabla x(k) = x(k) - x(k-1)$$

$$\mathcal{Z}(\nabla x(k)) = \mathcal{Z}(x(k)) - \mathcal{Z}(x(k-1)) = X(z) - z^{-1}X(z)$$
$$= (1 - z^{-1})X(z)$$

$$\nabla^2 x(k) = \nabla(\nabla x(k)) = \nabla[x(k) - x(k-1)] = \nabla x(k) - \nabla x(k-1)$$

$$= [x(k) - x(k-1)] - [x(k-1) - x(k-2)] = x(k) - 2x(k-1) + x(k-2)$$

$$\mathcal{Z}(\nabla^2 x(k)) = \mathcal{Z}(x(k)) - 2\mathcal{Z}(x(k-1)) + \mathcal{Z}(x(k-2))$$

$$= X(z) - 2z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) = (1 - z^{-1})^2 X(z)$$

در حالت کلی

$$\mathcal{Z}(\nabla^n x(k)) = (1 - z^{-1})^n X(z)$$

$$\Delta x(k) = x(k+1) - x(k)$$

$$\mathcal{Z}[\Delta(x)] = \mathcal{Z}[x(k+1)] - \mathcal{Z}[x(k)]$$

$$= zX(z) - z\,x(0) - X(z) = (z-1)X(z) - z\,x(0)$$

$$\mathcal{Z}[\Delta^2(x)] = \mathcal{Z}[x(k+2)] - 2\mathcal{Z}[x(k+1)] + \mathcal{Z}[x(k)]$$
$$= z^2X(z) - z^2x(0) - z\,x(1) - 2[zX(z) - z\,x(0)] + X(z)$$
$$= (z-1)^2X(z) - z(z-1)x(0) - z\Delta x(0)$$

$$\mathcal{Z}[\Delta^m x(k)] = (z-1)^m X(z) - z\sum_{j=0}^{m-1}(z-1)^{m-j-1}\Delta^j x(0)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قضیه انتقال مختلط

$$Z[e^{-at}x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-akT}z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)(ze^{aT})^{-k}$$

$$= X(ze^{aT})$$

مثال ۲-۹ تبدیل z te^{-at} را بدست آورید

$$Z[t] = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = X(z) \to Z[te^{-at}] = X(ze^{aT})$$

$$= \frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$$

قضیه مقدار اولیه: اگر $x(t)$ دارای تبدیل z بود، و اگر $\lim_{z\to\infty} X(z)$ وجود داشته باشد، در این صورت مقدار اولیه $x(0)$ از $x(t)$ یا $x(k)$ به صورت زیر داده می‌شود

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

$$\underset{z\to\infty}{X(z)} = \underset{z\to\infty}{\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}} = \underset{z\to\infty}{x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots} = x(0)$$

مثال ۲-۱۰ مطلوب است $x(0)$

$$X(z) = \frac{(1-e^{-T})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})} = 0$$

$$z\to\infty$$

قضیه مقدار نهایی

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})X(z)\right]$$

اثبات

$$Z[x(k)] = X(z) = \sum x(k)z^{-k},$$

$$Z[x(k-1)] = z^{-1}X(z) = \sum x(k-1)z^{-k}$$

$$Z[x(k)] - Z[x(k-1)] = (1-z^{-1})X(z) = \sum x(k)z^{-k} - \sum x(k-1)z^{-k}$$

$$\underset{z\to1}{=} \sum_{k=0}^{\infty}(x(k) - x(k-1)) = [\cancel{x(0)} - \overset{=0}{x(-1)}] + [\cancel{x(1)} - \cancel{x(0)}] + [x(2) - \cancel{x(1)}]$$

$$+ [x(\infty) - \cancel{x(\infty-1)}] = x(\infty) = \lim_{z\to1}(1-z^{-1})X(z)$$

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} \qquad a>0 .$$ مثال ۲-۱۱

$$x(\infty) = \frac{(1-z^{-1})}{1-z^{-1}}\bigg|_{z\to 1} - \frac{1-z^{-1}}{1-e^{-aT}z^{-1}}\bigg|_{z\to 1} = 1 - 0 = 1$$

مثال ۲-۱۲ معادله تفاضلی زیر را حل نموده و مقادیر اولیه و نهایی را با استفاده از قضایا در دو حالت محاسبه کنید

$$x(k) - a\,x(k-1) = 1(k) \qquad -1 < a < 1$$

$$X(z) - az^{-1}X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \rightarrow X(z)(1-az^{-1}) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{a}{1-az^{-1}}\right)$$

$$x(k) = \frac{1}{1-a} \times (1 - a^{k+1})$$

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) = 1 \qquad x(\infty) = \frac{\cancel{1-z^{-1}}}{(1-az^{-1})\cancel{(1-z^{-1})}}\bigg|_{z\to 1} = \frac{1}{1-a}$$

۴ مشتق‌گیری مختلط

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

$$\frac{d}{dz}X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-k)x(k) z^{-k-1} \longrightarrow$$

$$-z\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} k x(k) z^{-k} = Z[k x(k)]$$

$$\frac{d}{dz}\left[-z\frac{dX(z)}{dz}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} (-k^2) x(k) z^{-k-1} \longrightarrow$$

$$Z[k^2 x(k)] = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^2 X(z)$$

$$\left(-z\frac{d}{dz}\right)^{m} X(z) = \mathcal{Z}\left[k^{m} x(k)\right]$$

مثال ۲-۱۳: با استفاده از تبدیل z تابع پله تبدیل z تابع شیب را بدست آورید

$$\mathcal{Z}[1(k)] = \frac{1}{1-z^{-1}} \rightarrow x(k) = k \rightarrow \mathcal{Z}[x(k)] = ?$$

$$\mathcal{Z}[k x(k)] = -z\frac{d}{dz} X(z) = -z \frac{-z^{-2}}{(1-z^{-1})^{2}} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^{2}}$$

انتگرال گیری مختلط

فرض: کراندار بودن $\frac{x(k)}{k}$ برای $k=0$

$$\mathcal{Z}\left[\frac{x(k)}{k}\right] = \int_{z}^{\infty} \frac{X(z_1)}{z_1} dz_1 + \lim_{k\to 0} \frac{x(k)}{k}$$

آنوقت

$$\mathcal{Z}\left[\frac{x(k)}{k}\right] = G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x(k)}{k} z^{-k}$$

$$\frac{d\,G(z)}{dz} = -\sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k-1} = -z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = -\frac{X(z)}{z}$$

$$\int_{z}^{\infty} \frac{dG(z)}{dz} = G(\infty) - G(z) = -\int_{z}^{\infty} \frac{X(z_1)}{z_1} dz_1$$

$$\rightarrow \boxed{G(z) = \int_{z}^{\infty} \frac{X(z_1)}{z_1} dz_1 + G(\infty)}$$

مثال

$$x(k) = k^2 \Rightarrow X(z) = \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$$

$$Z\left[\frac{x(k)}{k}\right] = ? \qquad Z[k] = \int_z^\infty \frac{X(z_1)}{z_1}\, dz_1 + \frac{G(0)}{0}$$

$$Z\left[\frac{x(k)}{k}\right] = \int_z^\infty \frac{z^{-2}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}\, dz + 0$$

$$= \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = Z[k]$$

قضیه مشتق‌گیری پارامتری

$$Z\left[\frac{\partial x(t,a)}{\partial a}\right] = \frac{\partial X(z,a)}{\partial a}$$

$$x(t) = -te^{-at} \qquad g(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial a} = t^2 e^{-at}$$

$$Z[g(t)] = Z\left[\frac{\partial x(t)}{\partial a}\right] = \frac{\partial X(z,a)}{\partial a}$$

$$X(z,a) = \frac{Te^{-aT} z^{-1}}{(1-e^{-aT} z^{-1})^2}$$

$$\frac{\partial X(z,a)}{\partial a} = \frac{T^2 e^{-aT}(1+e^{-aT} z^{-1}) z^{-1}}{(1-e^{-aT} z^{-1})^3} = Z[t^2 e^{-at}]$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قضیه کانولوشن حقیقی: فرض کنید $x_1(t) = x_2(t) = 0$ برای $t<0$ و $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ تبدیل پذیر-Z بوده و تبدیل Z آنها به ترتیب $X_1(z)$ ، $X_2(z)$ باشند

$$X_1(z)\,X_2(z) = \mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^{K} x_1(hT)\,x_2(KT-hT)\right]$$

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^{K} x_1(ht)\,x_2(KT-hT)\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{K} x_1(hT)\,x_2(\underline{KT-hT})\,z^{-K}$$

برای $x_2 = 0$ $KT-hT<0 \leftarrow h>K$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} x_1(hT)\,x_2(kT-hT)\,z^{-K}$$

$m = k-h \rightarrow k = m+h$, $k=0 \rightarrow m=-h$

$$= \sum_{m=-h}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} x_1(hT)\,x_2(mT)\,z^{-m-h} = \sum_{h=0}^{\infty} x_1(hT)\,z^{-h}\sum_{m=\cancel{-h}\,0}^{\infty} x_2(mT)\,z^{-m}$$

$$= X_1(z) \times X_2(z)$$

قضیه کانولوشن مختلط: $X_1(z) = \mathcal{Z}[x_1(k)]$ $|z| > R_1$

$X_2(z) = \mathcal{Z}[x_2(k)]$ $|z| > R_2$

$$\mathcal{Z}[x_1(k)\,x_2(k)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c \xi^{-1} X_2(\xi)\,X_1(\xi^{-1}z)\,d\xi$$

$x(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint x(z)\,z^{k-1}\,dz$ که در $R_2 < |\xi| < |z|/R_1$

$$\mathcal{Z}[x_1(k)\,x_2(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)\,x_2(k)\,z^{-k} = \frac{1}{2\pi j}\sum_{k=0}^{\infty}\oint X_2(\xi)\,\xi^{k-1}\,x_1(k)\,z^{-k}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint \xi^{-1} X_2(\xi)\sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)\,(\xi^{-1}z)^{-K}\,d\xi$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint \xi^{-1} X_2(\xi)\,X_1(\xi^{-1}z)\,d\xi$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$R_1 < 1$

قضیه پارسوال. فرض کنید $X_1(z) = Z[x_1(k)] \quad |z| > R_1$

$X_2(z) = Z[x_2(k)] \quad |z| > R_2$

$R_2 < |\xi| < \frac{1}{R_1}$ یا $|z| = 1$

$$Z[x_1(k)\, x_2(k)]_{|z|=1} = \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)\, x_2(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint \xi^{-1} X_2(\xi) X_1(\xi^{-1}) d\xi$$

اگر در این فرمول $x_1(k) = x_2(k) = x(k)$ قرار دهیم

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^2(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint \xi^{-1} X(\xi) X(\xi^{-1}) d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint z^{-1} X(z) X(z^{-1}) dz$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

عکس تبدیل Z

$$Z^{-1}$$

$$X(Z) \xrightarrow{Z^{-1}} x(k)$$

چهار روش داریم

۱- روش تقسیم مستقیم

۲- روش محاسباتی

۳- روش بسط کسر جزئی

۴- روش انتگرال معکوس سازی

روش تقسیم مستقیم می دانیم

$$X(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) Z^{-k} = x(0) + x(T)Z^{-1} + x(2T)Z^{-2} + \dots$$

$$F_1(Z) = (1-aZ^{-1})^3 = \underbrace{1}_{x(0)} \underbrace{- 3aZ^{-1}}_{x(1)} + \underbrace{3a^2Z^{-2}}_{x(2)} \underbrace{- a^3Z^{-3}}_{x(3)}$$

$$F_2(Z) = (1-aZ^{-1})^{-1} = 1 + aZ^{-1} + a^2Z^{-2} + a^3Z^{-3} + a^4Z^{-4} + a^5Z^{-5} + \dots \qquad |Z|>1$$

مثال $x(k)$ برای $k=0,1,2,3,4$

$$X(Z) = \frac{10Z+5}{(Z-1)(Z-0.2)} = \frac{10Z^{-1}+5Z^{-2}}{1-1.2Z^{-1}+0.2Z^{-2}}$$

$$\begin{array}{l|l} 10Z^{-1}+5Z^{-2} & 1-1.2Z^{-1}+0.2Z^{-2} \\ \hline -(10Z^{-1}-12Z^{-2}+2Z^{-3}) & 10Z^{-1}+17Z^{-2}+18.4Z^{-3}+18.68Z^{-4} \\ 17Z^{-2}-2Z^{-3} & \\ -(17Z^{-2}-20.4Z^{-3}+3.4Z^{-4}) & \\ 18.4Z^{-3}-3.4Z^{-4} & \\ -(18.4Z^{-3}-22.08Z^{-4}+3.68Z^{-5}) & \\ 18.68Z^{-4}-3.68Z^{-5} & \end{array}$$

عکس تبدیل Z عبارت زیر را بدست آورید

$$X(Z) = 1 + 2Z^{-1} + 3Z^{-2} + 4Z^{-3}$$

$x(0)=1 \quad x(1)=2 \quad x(2)=3$

$x(3)=4$

روش محاسباتی : این روش با استفاده از کامپیوتر اجرا می شود و آنرا برای هر مثال توضیح می دهیم

مثال
$$X(z)=\frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)}=\frac{10z+5}{z^2-1.2z+0.2}\underbrace{U(z)}_{=1}$$

تعریف تبدیل Z
$$U(z)=u(0)+u(1)z^{-1}+u(2)z^{-2}+\dots u(k)z^{-k}+\dots$$

در نتیجه
$$u(0)=1,\ u(1)=u(2)=\dots=0 \Leftarrow U(z)=1$$

$$x(k+2)-1.2x(k+1)+0.2x(k)=10u(k+1)+5u(k)$$

که در آن
$$x(k)=0\ \ k<0 \quad , \quad u(k)=0\ \ k=1,2,\dots \quad \text{و} \quad u(0)=1$$
$$x(-1)=x(-2)=0$$

$$k=-2 \rightarrow x(0)-1.2x(-1)+0.2x(-2)=10u(-1)+5u(-2)$$
$$\rightarrow x(0)=0$$
$$k=-1 \rightarrow x(1)-1.2\cancel{x(0)}+0.2\cancel{x(-1)}=10u(0)+5u(-1)$$
$$\rightarrow x(1)=10$$
$$k=0 \rightarrow x(2)-1.2x(1)+0.2\cancel{x(0)}=10\cancel{u(1)}+5u(0)$$
$$\rightarrow x(2)=12+5=17$$
$$k=1 \rightarrow \dots\dots \quad x(3)=18.4$$
$$k=2 \rightarrow \quad x(4)=18.68,\dots$$
$$k=9 \rightarrow \quad x(11)=18.75 \quad , \quad x(12)=18.75$$

$$\lim_{z\to 1} X(z)=x(\infty)=18.75$$

روش گسترش کسر جزئی

$zX(z)$

در این حالت $X(z)$ یا $X(z)/z$ را به کسرهای جزئی تبدیل شوند و از روی جدول تبدیل z توابع شکل را بدست می‌آوریم

مثال

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1-az^{-1}} \rightarrow Y(z) = zX(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$Z^{-1}[Y(z)] = y(k) = a^k \qquad X(z) = z^{-1}Y(z)$$

$$\rightarrow x(k) = y(k-1) \rightarrow \begin{cases} x(k) = a^{k-1} & k \geq 1, 2, \ldots \\ x(k) = 0 & k \leq 0 \end{cases}$$

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} \qquad m \leq n$$

$$= \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}$$

اگر $b_m = 0$

با

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{a_1}{z-p_1} + \frac{a_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{a_n}{z-p_n}$$

$$a_i = \left[(z-p_i)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=p_i}$$

اگر قطب مکرر داشته باشد با ضرب در $(z-p_i)$ و $(z-p_i)^2$ تجزیه را انجام می‌دهیم.

مثال ۲-۱۹

$$X(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-0.2)} \rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{12.5}{z-1} - \frac{12.5}{z-0.2}$$

$$\rightarrow X(z) = 12.5\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-0.2z^{-1}}\right) \qquad Z\left[\frac{1}{1-z^{-1}}\right] = 1$$

$$Z\left[\frac{1}{1-0.2z^{-1}}\right] = (0.2)^k$$

$$x(k) = 12.5\left(1-(0.2)^k\right] \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

روش انتگرال معکوس‌سازی: با استفاده از قضیه کوشی گورسات و قضیه مانده (انتگرال مختلط) معکوس تبدیل z قابل حل است

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} = x(0) + x(T) z^{-1} + x(2T) z^{-2} + \dots x(kT) z^{-k}$$

$$X(z) z^{k-1} = x(0) z^{k-1} + x(T) z^{k-2} + x(2T) z^{k-3} + \dots x(kT) z^{-1} + \dots$$

$$\rightarrow x(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{k-1} dz$$

اگر تعداد m قطب داشته باشیم

$$x(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \Big[\oint_{C_1} X(z) z^{k-1} dz + \oint_{C_2} X(z) z^{k-1} dz + \dots \oint_{C_m} X(z) z^{k-1} dz \Big] = \frac{\cancel{2\pi j}}{\cancel{2\pi j}} [K_1 + K_2 + \dots K_m]$$

مقدار مانده انتگرال

$$K = \frac{1}{(q-1)!} \lim_{z \to z_i} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} \left[(z - z_i)^q X(z) z^{k-1} \right]$$

مثال ۲-۳۴

$$X(z) = \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})} \rightarrow x(kT) = ?$$

دو قطب در $z_1 = 1$ و $z_2 = e^{-aT}$ دارد

$$K_1 = z_1 \text{ مانده در } = \lim_{z \to 1} \left[\cancel{(z-1)} \frac{(1 - e^{-aT}) \times z \times z^{k-1}}{\cancel{(z-1)}(z - e^{-aT})} \right] = 1$$

$$K_2 = z_2 \text{ مانده در } = \lim \frac{\cancel{(z - e^{-aT})} (1 - e^{-aT}) z^{k}}{(z-1) \cancel{(z - e^{-aT})}} = -e^{-akT}$$

$$x(kT) = K_1 + K_2 = 1 - e^{-akT} \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

تابع تبدیل پالسی و دنباله وزنی

سیستم زمان گسسته با معادله تفاضلی زیر

$$x(k)+a_1x(k-1)+\dots a_nx(k-n)=b_0u(k)+b_1u(k-1)+\dots b_nu(k-n)$$

$$\mathcal{Z}[x(k)]=X(z) \qquad \mathcal{Z}[x(k-1)]=z^{-1}X(z)$$

$$\mathcal{Z}[x(k+1)]=zX(z)-zx(0) \qquad \mathcal{Z}[x(k+2)]=z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)$$

$$X(z)+a_1z^{-1}X(z)+\dots a_nz^{-n}X(z)=b_0U(z)+b_1z^{-1}U(z)+\dots b_nz^{-n}U(z)$$

$$X(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\dots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+\dots a_n}U(z)$$

ورودی $u(t)$ تابع دلتای کرونکر $\delta_0(kT)$ باشد

$$\delta_0(kT)=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases} \longrightarrow \mathcal{Z}[\delta_0(kT)]=1$$

$$U(z)=1$$

$$X(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\dots b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+\dots a_n}=G(z)$$ تبدیل پالسی

$$g(k)=\mathcal{Z}^{-1}(G(z))$$ را دنباله وزنی می‌گویند

مشابه پاسخ ضربه است

مثال ۲_۲۷ صفحه کتاب

$$x(k+2)+a_1x(k+1)+a_2x(k)=b_0u(k+2)+b_1u(k+1)+b_2u(k)$$

$$G(z)=\frac{X(z)}{U(z)}$$ تابع تبدیل پالسی $u(k)=0 \quad k<0$ با فرض اینکه $x(k)=0$

$$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)+a_1zX(z)-a_1zx(0)+a_2X(z)=$$
$$b_0z^2U(z)-b_0z^2+b_1zU(z)-b_1z+b_2U(z)$$

$$X(z)[z^2+a_1z+a_2]=(b_0z^2+b_1z+b_2)U(z)+z^2(x(0)-b_0u(0))+z(x(1)+a_1x(1)$$
$$-b_0u(1)-b_1u(0)]$$

1

$$x(0) + a_1 \cancel{x(-1)} + a_2 \cancel{x(-2)} = b_0 u(0) + \cancel{b_1 u(-1)} + \cancel{b_2 u(-2)} \qquad k=-2$$

$$x(0) = b_0 u(0) = b_0$$

$$x(1) = -a_1 x(0) + b_0 \cancel{u(1)} + b_1 u(0) = \cancel{-a_1 b_0 + b_1}$$

①

$$(z^2 + a_1 z + a_2) X(z) = (b_0 z^2 + b_1 z + b_2) U(z) + z^2 \times 0 + z(\cancel{a_1 x(0)} + \cancel{b_0 u(1)} + \cancel{b_1 u(0)} + \cancel{a_1 x(0)} - \cancel{b_0 u(1)} - \cancel{b_1 u(0)})$$

$$\rightarrow \frac{X(z)}{U(z)} = \cancel{\frac{z^2 + a_1 z + a_2}{b_0 z^2 + b_1}} \quad \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

$$G(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

مثال ۲-۲۸ دنباله وزنی سیستم زمان گسسته زیر را بدست آورید

$$x(k) - a x(k-1) = u(k)$$

$$X(z) - a z^{-1} X(z) = U(z) \rightarrow \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = G(z)$$

$$g(k) = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)] = \begin{cases} a^k & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

مثال ۲-۲۹ معادله تفاضلی زیر را با استفاده از تبدیل z حل نمایید

$$x(k+2) + 3x(k+1) + 2x(k) = 0 \qquad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$$

$$z^2 X(z) - z^2 x(0) - z x(1) + 3z X(z) - 3z x(0) + 2X(z) = 0$$

$$X(z)(z^2 + 3z + 2) = z \rightarrow X(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2}$$

$$= \frac{1}{1 + z^{-1}} - \frac{1}{1 + 2z^{-1}}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{1+z^{-1}}\right] - \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{1+2z^{-1}}\right] = (-1)^k - (-2)^k \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

فصل سوم

مطالب زمینه‌ای برای تحلیل حوزه Z

نکات قابل توجه نسبت به تبدیل Z

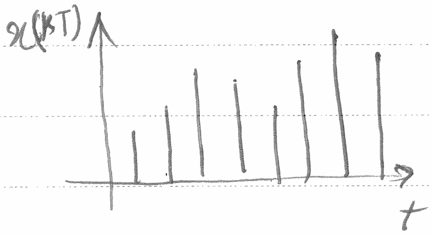
۱- سیگنال واقعی با تعدادی نمونه در زمانهای مشخص جایگزین می‌شود. این تقریب زمانی قابل قبول است که طول زمان نمونه برداری در مقایسه با بزرگترین ثابت زمانی موجود کوچک باشد.

۲- روش تبدیل Z که توابع تبدیل پالسی را به کار می‌برد اساساً برای تحلیل و ترکیب سیستم‌های کنترل زمان‌گسسته خطی تغییرناپذیر با زمان تک ورودی - تک خروجی بسط داده شده است.

۳- روش تبدیل Z تنها برای سیستمهای نتایج دقیق ارائه می‌دهد که بتوان در آنها سیگنال‌های موجود را با مقادیر آنها در زمانهای نمونه برداری دقیقاً نمایش داد.

(چگونه از تبدیل لاپلاس تبدیل Z را بدست آوریم؟)

۳-۲ سیستم‌های کنترل زمان گسسته و نمونه برداری ضربه‌ای



$$h(kT+\tau)=a_n\tau^n+a_{n-1}\tau^{n-1}+\dots a_1\tau+a_0$$

اگر $h(kT)=x(t)$ باشد $a_0=x(kT)$

$$\Rightarrow h(kT+\tau)=a_n\tau^n+\dots a_{n-1}\tau^{n-1}+\dots a_1\tau+a_0$$

اگر نگهدار، نگهدار داده‌ها از یک برون‌یاب (Extrapolator) چند جمله‌ای مرتبه nام باشد آن را یک نگهدار مرتبه nام گویند پس اگر $n=1$ آن را نگهدار مرتبه اول (first order hold) گویند.

توجه: نگهدار مرتبه nام $n+1$ داده گسسته قبلی از $x(k-n)T$ تا $x(kT)$ را مورد استفاده قرار می‌دهد. این موضوع سبب تأخیر در سیستم و سبب ناپایداری می‌شود.

ساده‌ترین نوع نگهدار، مرتبه صفر $0\le\tau<T$ $\quad h(kT+\tau)=x(kT)$

$t=kT+\tau$

در این کتاب بیشتر فرض نگهدار مرتبه صفر است

$$1(t) = u(t)$$

$h(t)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت (با نگهدار مرتبه صفر)

$$h(t) = x(0)\left[1(t) - 1(t-T)\right] + x(T)\left[1(t-T) - 1(t-2T)\right] + x(2T)\left[1(t-2T) - 1(t-3T)\right] + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\left[u(t-kT) - u(t-(k+1)T)\right] \qquad 1(t) = u(t)$$

$$\mathcal{L}\left[u(t-kT)\right] = \frac{e^{-kTs}}{s}$$

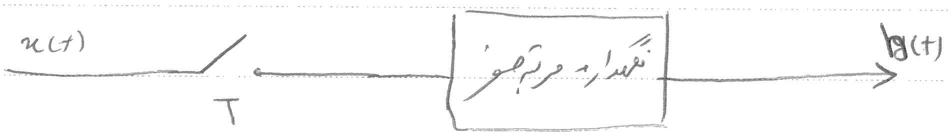
$$\mathcal{L}\left[h(t)\right] = H(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,\frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s}$$

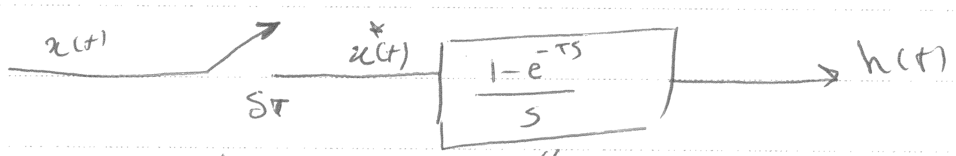
$$= \underbrace{\frac{1-e^{-Ts}}{s}}_{G_{h_0}(s)} \; \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, e^{-kTs}}_{X^*(s)}$$

قطار ضربه؟ $X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, e^{-kTs} \longrightarrow x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)$

$\boxed{\delta_T(t) = \sum_{k=0} \delta(t-kT)}$. این یک قطار ضربه با دامنه $x(t)$ در لحظات $t=kT$ می‌باشد.

تابع $h(t)$ شبیه تابع پله‌ای سیگنال اصلی خواهد بود که از کانولوشن $x^*(t)$ با $Gh(t)$ به دست می‌آید.





$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, e^{-kTs} \xrightarrow{\text{اگر}} e^{Ts} = z \rightarrow s = \frac{1}{T}\ln z$$

$$X^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, z^{-k} \longrightarrow X^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = X(z)$$

$$= X^*\left(\frac{1}{T}\ln z\right)$$

Subject :

Year . Month . Date . ( )

توجه شود که چه فقط در تبدیل $X^*(s)$ به $X(z)$ نزدیک است اما تغییر متغیر $\frac{1}{T}\ln z$ را در شده برای ضربه باید اعمال کنید تا $X(z)$ بدست آید.

$$X(s) = \underbrace{\frac{X(s) \times s}{1-e^{-Ts}}}_{X^*(s)} \times \underbrace{\frac{1-e^{-Ts}}{s}}_{\text{تابع تبدیل اصلاح ضربه}}$$

این شیوه زمانی صادق است که در ورودی و خروجی ضربه سیگنال باشد.

مثال ۳-۱ تبدیل z تابع دلتای کرونکر را بدست آورید.

فرض: $x(t) = \delta_0(t)$

$$\delta_0(kT) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k\neq 0 \end{cases}$$

قطار ضربه

$$x^*(t) = x(t)\,\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)$$

چون این تابع فقط در لحظه صفر مقدار دارد

$$x^*(t) = x(0)\,\delta(t) \rightarrow X^*(s) = x(0) \times 1 = x(0) = 1$$

$$X(z) = X^*\left(\tfrac{1}{T}\ln z\right) = 1$$

مثال ۳-۲) تبدیل z تابع پله واحد $u(t)$ را بدست آورید. $x(t) = u(t)$

$$x^*(t) = x(t)\,\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,\delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)$$

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} = \frac{1}{1-e^{Ts}} \longrightarrow X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

اثر روش خلاصه فوق با توجه به تابع تبدیل را به حسن تقسیم کار

با توجه به اینکه برای تابع پله خروجی و ورودی یکسان است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جمع‌بندی مبحث ارائه شد.

۱- یک نمونه‌بردار واقعی از سیگنال ورودی متناوباً (در زمان‌های بسیار کوتاه) نمونه‌برداری کرده و دنباله‌ای از پالس‌ها را به عنوان خروجی به وجود می‌آورد. عرض باریک نمونه‌برداری سبب می‌شود پالس‌ها به ضربه تبدیل شوند این سیگنال‌ها از نظر تقریب معادل خواهند بود که مدار نگهدار وجود داشته باشد.

۲- با تغییر متغیر $\frac{1}{T}\ln z$ و با استفاده از تبدیل لاپلاس $X^*(s)$ و تبدیل $X(z)$ را محاسبه کرد.

۳- در روش تبدیل z ما فقط سیگنال را در لحظات نمونه‌برداری در نظر می‌گیریم لذا تبدیل Z $x(t)$ و $x^*(t)$ یکسان خواهد بود.

$$Z[x(t)] = Z[x^*(t)] = X(z)$$

۴- همانطور که دیدیم نمونه‌بردار واقعی و نگهدار مرتبه صفر با نمونه‌بردار ضربه و تابع تبدیل $\frac{1-e^{-Ts}}{s}$ معادل خواهند بود.

۵- نمونه‌بردار واقعی و نمونه‌بردار ضربه‌ای تفاوت دارند که در نمایش نیز متفاوت رسم شده‌اند.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

تابع تبدیل مدارهای نگهدار

$$G_{h_0}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$$ تابع تبدیل نگهدار مرتبه صفر بصورت زیر بود. (نگهدار پله‌ای)

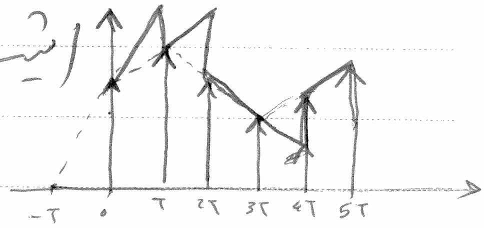
$$G_{h_1}(s) = \left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right)^2 \frac{Ts+1}{T}$$ مرتبه ۱ (نگهدار خطی)

اگر $n=1$ باشد

$$h(KT+\tau) = a_1\tau + x(KT) \rightarrow h(KT) = x(KT)$$

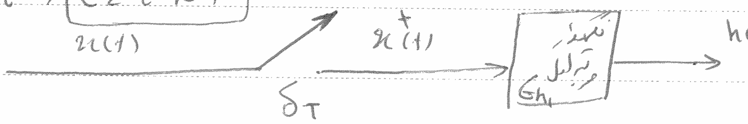
$$h((k-1)T) = x((k-1)T) = -a_1 T + x(KT) = x((k-1)T)$$

$$a_1 = \frac{x(KT) - x((k-1)T)}{T}$$ (شیب قبلی)



$$h(KT+\tau) = x(KT) + \frac{x(KT) - x((k-1)T)}{T}\tau$$

$$KT+\tau = t \rightarrow \boxed{\tau = t-KT}$$



$$x^*(t) = u^*(t) = \sum_{k=0} u(KT)\delta(t-KT) = \sum_{k=0}\delta(t-KT)$$ فرض کنید $x(t)=u(t)$

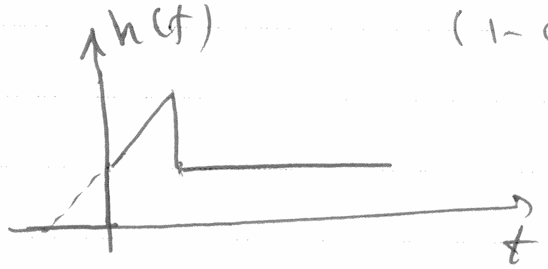
$$h(t) = \left(1+\frac{t}{T}\right)u(t) - \frac{t-T}{T}u(t-T) - u(t-T)$$

$$H(s) = \left(\frac{1}{s}+\frac{1}{Ts^2}\right) - \frac{1}{Ts^2}e^{-Ts} - \frac{1}{s}e^{-Ts} = \frac{1-e^{-Ts}}{s} + \frac{1-e^{-Ts}}{Ts^2}$$

$$X^*(s) = L[u^*(t)] = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \rightarrow G_{h_1}(s) = \frac{H(s)}{X^*(s)} = \left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right)^2\frac{Ts+1}{T}$$

می‌توان نتیجه گرفت

نمونه بردار واقعی ترکیب شده با یک نگهدار مرتبه اول معادل یک نمونه بردار ضربه‌ای ترکیب شده با تابع تبدیل $(1-e^{-Ts})^2(Ts+1)/(Ts^2)$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

۳-۲ بدست آوردن تبدیل Z با روش انتگرال کانولوشن

در قسمت قبل بدست آوردیم $x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t)\,\delta(t-kT) = x(t)\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)$

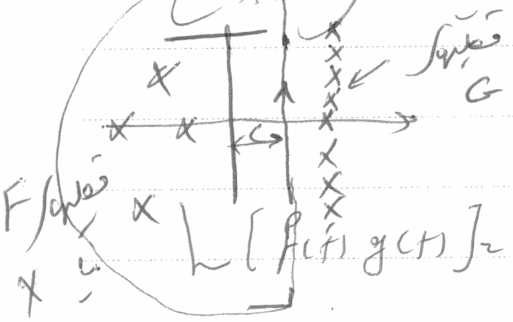
$$\mathcal{L}[\delta(t-kT)] = e^{-kTs} \rightarrow \mathcal{L}\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)\Big] = 1+e^{-Ts}+e^{-2Ts}+\dots$$

$$= \frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

از آنجا که

$$X^*(s) = \mathcal{L}[x^*(t)] = \mathcal{L}\Big[x(t)\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)\Big]$$

ملاحظه می‌شود که تبدیل لاپلاس $X^*(s)$ ~~حاصلضرب~~ تبدیل لاپلاس $x^*(t)$ بوده که حاصلضرب دو تابع زمانی $x(t)$ و $\sum\delta(t-kT)$ می‌باشد. که حاصلضرب تبدیل لاپلاس آنها برابر نیست



حاصلضرب در زمان به کانولوشن در حوزه تبدیل لاپلاس تبدیل می‌شود

$$\mathcal{L}[f(t)\,g(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)\,G(s-p)\,dp$$

انتگرال‌گیری در امتداد خطی است که قطبهای G را از F جدا می‌کند

$$G(s) = \mathcal{L}\Big[\sum\delta(t-kT)\Big] = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \rightarrow G(s-p) = \frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}$$

قطبهای $G(s-p)$ در نیم صفحه سمت چپ $\Rightarrow p = s \pm j\frac{2\pi}{T}k$

با استفاده از قضیه مانده‌ها از مسیر بسته استفاده می‌کنیم

$$X^*(s) = \mathcal{L}\Big[x(t)\sum\delta(t-kT)\Big] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)\,\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}\,dp$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint \frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}\,dp$$

$$X^*(s) = \sum\Big[\text{مانده } \frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}} \text{ در قطب } X(p)\Big]$$

تغییر متغیر Z به جای e^{Ts}

$$X(z) = \sum\Big[\text{مانده } \frac{X(s)\,z}{z-e^{Ts}} \text{ در قطب } X(s)\Big]$$

تغییر متغیر $s \leftarrow p$

اگر قطب ساده باشد: $K_j = \lim_{s\to s_j}\Big[(s-s_j)\,\frac{X(s)\,z}{z-e^{Ts}}\Big]$

اگر قطب تکراری باشد:

$$K_i = \frac{1}{(n_i-1)!}\lim_{s\to s_i}\frac{d^{n_i-1}}{ds^{n_i-1}}\Big[(s-s_i)^{n_i}\,\frac{X(s)\,z}{z-e^{Ts}}\Big]$$

این صفحه تکرار صفحه بعد

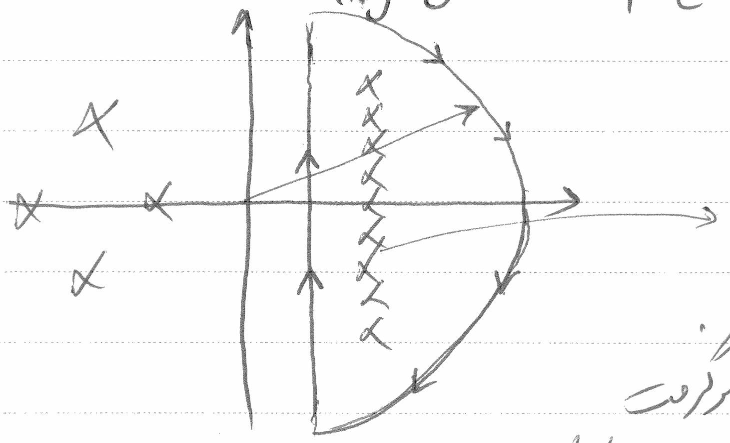
در نیم صفحه سمت چپ انتگرال گیری فقط شامل قطبهای $X(p)$ باشد ،

با توجه به فرض بزرگتر بودن درجه مخرج از صورت انتگرال روی باقیمانده مسیر $(c-j\infty, c+j\infty)$ صفر می‌باشد

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)\,\frac{1}{1-e^{-Ts}\times e^{Tp}}\,dp$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint X(p)\,\frac{1}{1-e^{-Ts}e^{Tp}}\,dp - \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma_L} X(p)\,\frac{1}{1-e^{-Ts}e^{Tp}}\,dp$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint X(p)\,\frac{1}{1-e^{-Ts}e^{Tp}}$$



در نیم صفحه سمت راست

$s \pm j\omega_s k$

در اینصورت دو حالت را جداگانه می‌توان در نظر گرفت

حالت ۱ درجه مخرج حداقل ۲ درجه بزرگتر از صورت باشد.

$$\lim_{s\to\infty} sX(s) = x(0^+) = 0$$

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j}\oint \frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}\,dp$$

در اینصورت مقدار این انتگرال برابر با مقدار باقیمانده در قطبهای $\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}$ خواهد بود

$$X^*(s) = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\lim_{p\to s+j\omega_s k}\left\{[p-(s+j\omega_s k)]\,\frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}\right\}\right]$$

حالت ۲ درجه مخرج یک واحد بزرگتر از صورت باشد

$$\lim_{s\to\infty} sX(s) \neq 0$$

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma_R}\frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}\,dp = -\frac{1}{2}x(0^+)$$

۳۰۹

$$X^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(s+j\omega_s k) + \frac{1}{2}x(0^+)$$ تذکر

بدست آوردن تبدیل z توابع شامل $\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right)$ نگهدار مرتبه صفر

$$X(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}G(s) = (1-e^{-Ts})\underbrace{\frac{G(s)}{s}}_{G_1(s)}$$

$$X_1(s) = \underbrace{e^{-Ts}G_1(s)} \qquad X(s) = G_1(s) - X_1(s)$$

$$x_1(t) = \int_0^t g_0(t-\tau)g_1(\tau)d\tau \rightarrow g_0(t) = L^{-1}[e^{-Ts}] = \delta(t-T)$$

$$g_1(t) = L^{-1}[G_1(s)]$$

$$x_1(t) = \int_0^t \delta(t-T-\tau)\, g_1(\tau)\, d\tau = g_1(t-T)$$

$$Z[g_1(t)] = G_1(z) \longrightarrow Z[x_1(t)] = z^{-1}G_1(z)$$

$$X(z) = Z[g_1(t)] - Z[x_1(t)] = (1-z^{-1})G_1(z)$$

$$X(z) = (1-z^{-1})Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

برای نگهدار مرتبه ۱

$$X(z) = (1-z^{-1})^2 Z\left[\frac{Ts+1}{Ts^2}G(s)\right]$$

مثال ۳-۲ با داشتن $X(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$

با استفاده از انتگرال کانولوشن در نیم صفحه چپ $X(z)$ را بدست آورید

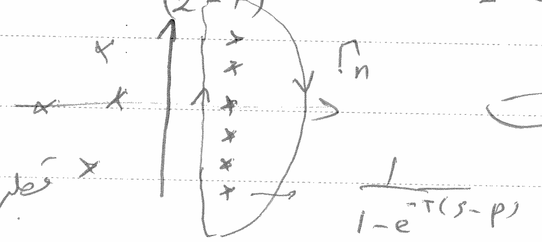
یک قطب مکرر در $s=0$ و قطب ساده در $s=-1$

$$X(z) = \sum \left[X(s) \text{ در قطب } \frac{X(s)\,z}{z-e^{Ts}} \text{ مانده} \right]$$

$$= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\left[\frac{s^2 \times 1}{s^2(s+1)} \times \frac{z}{z-e^{Ts}} \right] + \lim_{s\to -1} \left[\frac{(s+1)\times 1}{s^2(s+1)} \times \frac{z}{z-e^{Ts}} \right]$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{-z\left[z-e^{Ts} + (s+1)(-T)e^{Ts}\right]}{(s+1)^2(z-e^{Ts})^2} + \frac{1}{(-1)^2} \times \frac{z}{z-e^{-T}}$$

$$= \frac{-z(z-1-T)}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-T}}$$



محاسبه انتگرال کانولوشن در نیم صفحه راست

حالت ۱ اگر درجه مخرج ۲ مرتبه بالاتر از صورت باشد $\lim_{s\to\infty} s\,X(s) = 0$

$$X(z) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(s + j\omega_s k) \Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}$$

حالت ۲ درجه مخرج $X(s)$ یک درجه بالاتر از صورت باشد

$$X^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(s+j\omega_s k) + \frac{1}{2}x(0^+)$$

$$X(z) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(s+j\omega_s k)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} + \frac{1}{2}x(0^+)$$

Subject :
Year .　　Month .　　Date .　　(　)

صفحه پنجم

۴-۳ بازسازی سیگنال‌های اصلی از روی سیگنال‌های نمونه‌برداری شده

مدارهای نگهدار در واقع فیلترهای پایین گذر می‌باشند

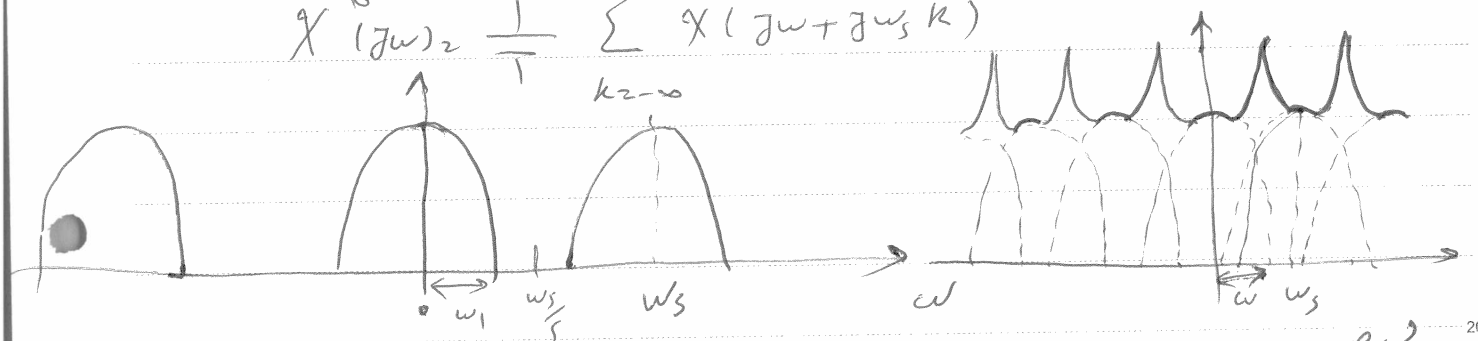
قضیه نمونه‌برداری: اگر فرکانس نمونه‌برداری در مقایسه با بالاترین مولفه فرکانسی موجود در سیگنال زمان پیوسته به قدر کافی بالا باشد مشخصه‌های دامنه سیگنال زمان پیوسته ممکن است که در پوش سیگنال نمونه‌برداری شده حفظ شود.

شرط نایکوئیست: اگر ω_s (فرکانس نمونه‌برداری یا همان فرکانس نایکوئیست) از دو برابر ω_1 (بیشترین فرکانس سیگنال) بزرگتر باشد سیگنال $x(t)$ به صورت کامل قابل بازسازی است.

$$X^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s + j\omega_s k) + \frac{1}{2}x(0^+)$$

برای مشخص کردن طیف فرکانسی $s = j\omega$ اگر $x(0^+) = 0$

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega + j\omega_s k)$$

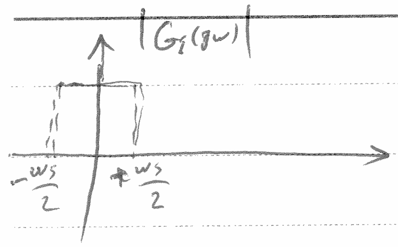


در صورت تداخل

اگر شرط فوق رعایت گردد سیگنال اصلی قابل بازسازی می‌باشد، و اگر نباشد تداخل فرکانسی خواهیم داشت

شکل ۳-۱۸ این شکل‌ها را به صورت کامل نمایش می‌دهد:

اگر سیگنال پیوسته شامل یک مولفه فرکانسی مساوی n برابر فرکانس نمونه‌برداری باشد آن وقت ممکن است آن مولفه در سیگنال نمونه‌برداری شده ظاهر نشود (نوسان پنهان شده)

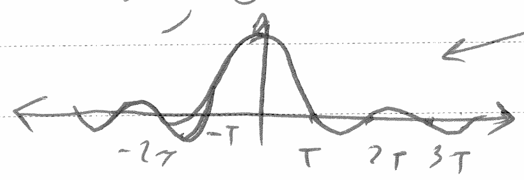


فیلتر پائین گذر ایده‌آل

اگر فیلتر ایده‌آل باشد دقیقاً سیگنال اولیه را بازیابی می‌کند

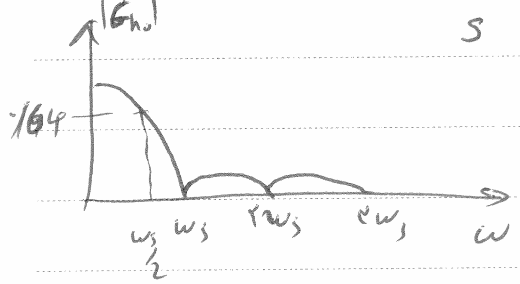
ولی ساختن آن در دنیای واقعی امکان‌پذیر نیست

شکل پاسخ ضربه این فیلتر



مشخصات پاسخ فرکانسی نگهدار مرتبه صفر

$$G_{h_0}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \rightarrow G_{h_0}(j\omega) = \frac{1-e^{-Tj\omega}}{j\omega} = T\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-\frac{1}{2}Tj\omega}$$



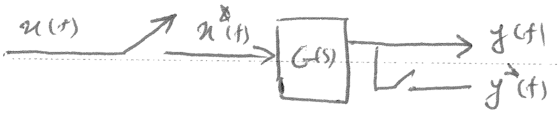
پاسخ فرکانسی نگهدار مرتبه صفر دلیل

ضعیف شدن فرکانس‌های n برابر ω_s را به خوبی نشان می‌دهد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تابع تبدیل پالس (ص ۲۱۱)

تابع تبدیل سیستم زمان پیوسته = $\dfrac{\text{تبدیل لاپلاس خروجی}}{\text{تبدیل لاپلاس ورودی}}$



تابع تبدیل پالس = $\dfrac{\text{تبدیل Z خروجی}}{\text{تبدیل Z ورودی}}$

مجموع کانولوشن

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau = \int_0^t x(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$$

اثبات کانولوشن گسسته

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)$$

این تابع متشکل از ضربه است اگر $g(t)$ پاسخ ضربه سیستم باشد.

$$y(t) = \begin{cases} g(t)x(0) & 0 \le t < T \\ g(t)x(0) + g(t-T)x(T) & T \le t < 2T \\ g(t)x(0) + g(t-T)x(T) + g(t-2T)x(2T) & 2T \le t < 3T \\ \cdots & \\ g(t)x(0) + \cdots \quad g(t-kT)x(kT) & kT \le t < (k+1)T \end{cases}$$

می‌دانیم برای $t < kT$ ، $g(t-kT) = 0$ پس در حالت کلی می‌توان نوشت

$$y(t) = g(t)x(0) + g(t-T)x[T] + \cdots g(t-kT)x(kT) = \sum_{h=0}^{k} g(t-hT)x(hT) \qquad 0 \le t < kT$$

$$y[kT] = \sum_{h=0}^{k} g(kT-hT)\,x(hT) = \sum_{h=0}^{k} x(kT-hT)\,g(hT)$$

$$y(kT) = x(kT) * g(kT)$$

اگر درجه مخرج حداقل ۲ درجه بزرگتر از صورت باشد تابع $g(t)$ پیوسته است

$$\lim_{s\to\infty} sG(s) = 0$$

تابع تبدیل پالسی

$$y(kT) = \sum_{h=0}^{\infty} g(kT-hT)\,x(hT)$$

① $g((k-h)T) = 0 \quad h>k$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} g(kT-hT)\,x(hT)\,z^{-k}$$

$k-h=m \Rightarrow k=m+h$

$$= \sum_{m=-h \; (0)}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} g(mT)\,x(hT)\,z^{-(m+h)} = \sum_{m=0}^{\infty} g(mT) z^{-m} \sum_{h=0}^{\infty} x(hT) z^{-h}$$

$$= G(z)\, X(z)$$

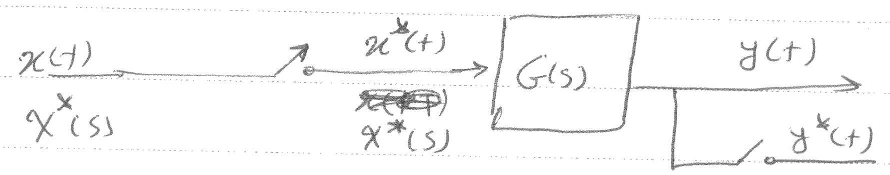
$$Y(z) = G(z)\,X(z) \rightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

اگر $x(t) = \delta(kT)$ ، $X(z) = 1$

$$G(z) = Y(z)$$

تبدیل لاپلاس ستاره دار سیگنال شامل تبدیل لاپلاس معمولی ستاره دار

(تاثیر مکان نمونه برداری)



$$Y(s) = G(s)\,X^*(s)$$

$$Y^*(s) = [G(s)\,X^*(s)]^* = G^*(s)\,X^*(s) \leftarrow \text{می‌توان اثبات کرد}$$

اثبات

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)X^*(s)] = \int_0^t g(t-\tau)x^*(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^t g(t-\tau)\sum_{k=0}^{\infty} x(\tau)\delta(\tau-kT)\,d\tau = \sum \int_0^t g(t-\tau)x(\tau)\delta(\tau-kT)\,d\tau$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} g(t-kT)x(kT)$$

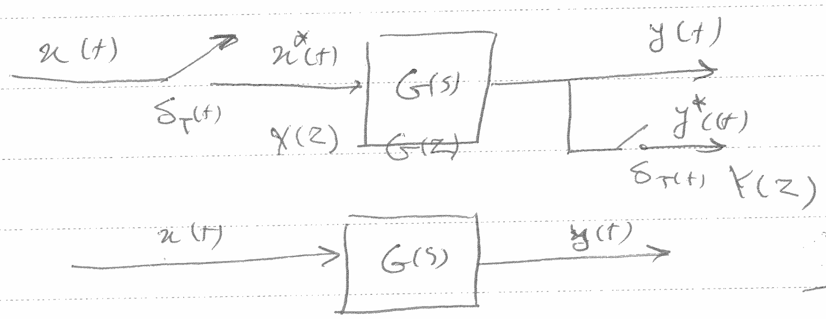
$$Y(z) = \mathcal{Z}[y(t)] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty} g(nT-kT)x(kT)\right]z^{-n}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} g(mT)x(kT)z^{-k-m} = G(z)X(z)$$

ازآنجا که تبدیل Z همان تبدیل لاپلاس با جایگذاری z با e^{Ts} می‌باشد می‌توان گفت

$$Y^*(s) = G^*(s)X^*(s)$$

و این اثبات رابطه صفحه قبل است



$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \mathcal{Z}[G(s)]$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s)$$

تابع تبدیل پالسی این سیستم برابر $\mathcal{Z}[G(s)]$ نیست چون ورودی نمونه برداری نمی‌شود

روشهای بدست آوردن تبدیل z یا تابع تبدیل z از $G(s)$ (یادآوری)

۱- $X(z) = \mathcal{Z}[$ کسر تجزیه شده $X(s)$ بصورت کسرهای جزئی $] = \sum_i \{\mathcal{Z}[X_i(s)]\}$

۲- $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$

۳- $X(z) = \sum \left[\right.$ مانده‌های $\frac{X(s)z}{z-e^{Ts}}$ در قطبهای $\left. X(s) \right]$

۴- $X(z) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(s+j\frac{2\pi}{T}k\right)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} + \frac{1}{2}x(0^+)$

روش چهارم برای تحلیل قابل استفاده است و خیلی از مواقع نمی‌توان به صورت یک سری محدود نوشت

Subject :

Year . Month . Date . ( )

مثال: مطلوب است تبدیل Z ، $G(s)$ با سه روش فوق

$G(s) = \frac{1}{s+a}$

① $\rightarrow Z\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$ مستقیم از طریق جدول

② $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = e^{-at} \rightarrow y[kT] = e^{-akT} \quad k=0,1,2,\ldots$

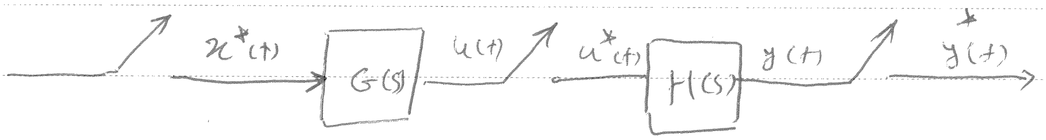
$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}(e^{aT}z)^{-k} = \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

③ $G(s)$ قطب $\rightarrow s=-a \rightarrow G(z) = \lim_{s\to -a}\left[(s+a)\frac{1}{s+a} \times \frac{z}{z-e^{Ts}}\right]$

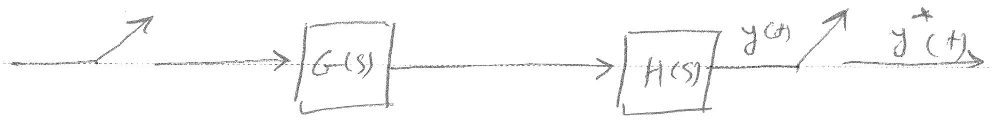
$$= \frac{z}{z-e^{-aT}} = \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

تابع تبدیل پالسی عناصر پشت سر هم

الف)



ب)



الف) $U(s) = G(s) \times X^*(s) \rightarrow Y^*(s) = H^*(s) \times U^*(s)$

$$Y^*(s) = H^*(s) \times G^*(s) \times X^*(s) \rightarrow Y(z) = H(z) * G(z) * X(z)$$

$$\rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) * G(z)$$

ب)

$$Y(s) = G(s)H(s)X^*(s) = GH(s)X^*(s)$$

$$Y^*(s) = [GH(s)]^* X^*(s) \rightarrow Y(z) = GH(z)X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = GH(z) = Z[GH(s)]$$

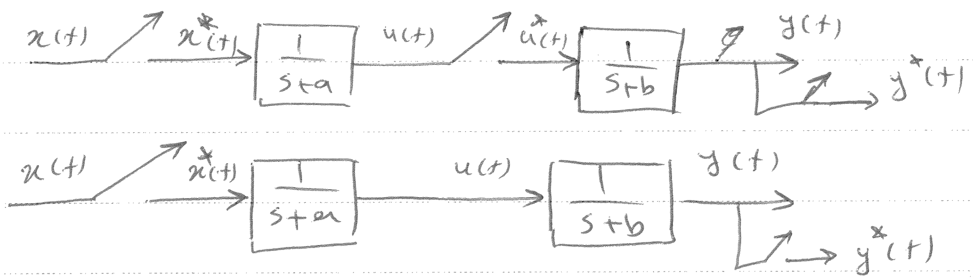
یعنی ابتدا باید G و H را در هم ضرب کرد. و بعد تبدیل Z گرفت

ص ۳۷

مثال

الف

ب



الف)

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) \times H(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s+a}\right] \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s+b}\right] = \frac{1}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}$$

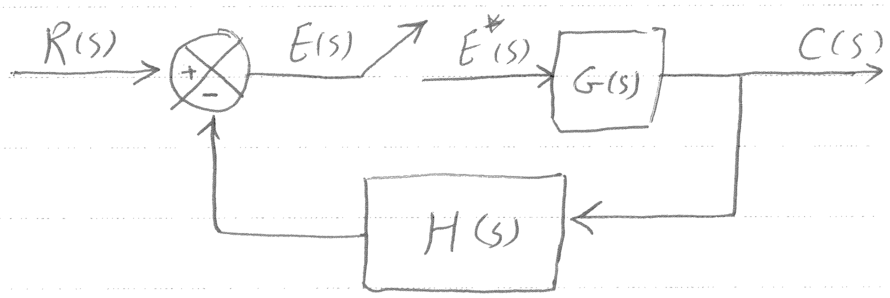
ب

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \mathcal{Z}\left[G(s)H(s)\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s+a} \times \frac{1}{s+b}\right]$$

$$= \mathcal{Z}\left[\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-bT}z^{-1}}\right)$$

تابع تبدیل پالس سیستم حلقه بسته



$$E(s) = R(s) - H(s)C(s)$$

$$C(s) = G(s)E^*(s)$$

$$\rightarrow E(s) = R(s) - H(s)G(s)E^*(s)$$

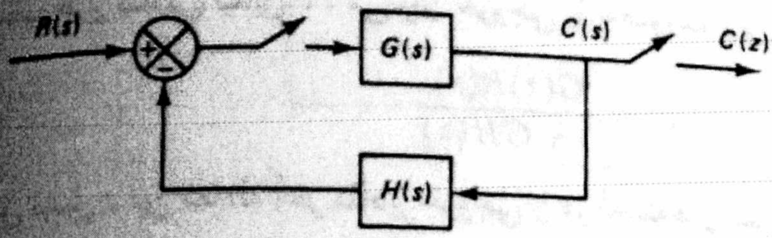
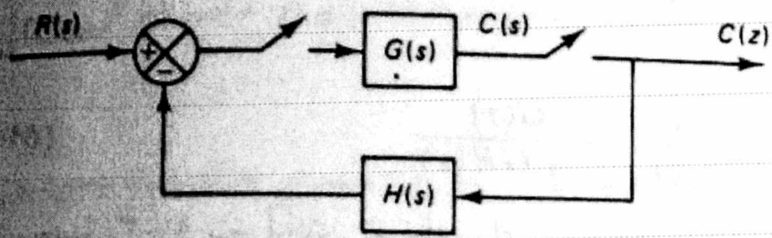
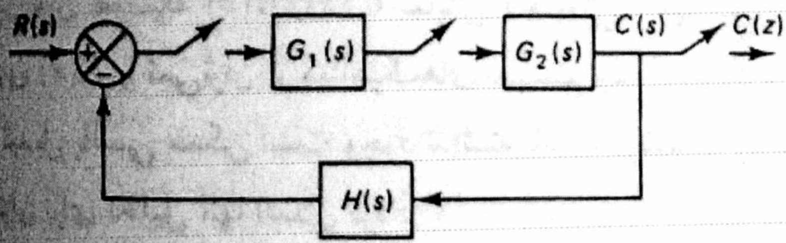
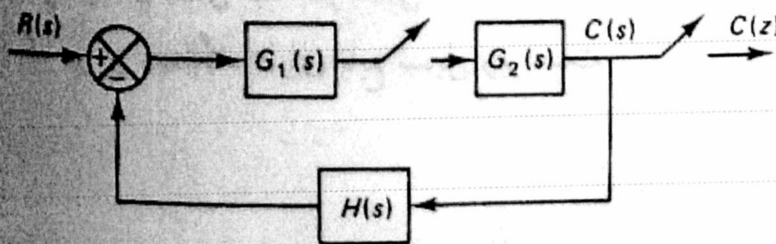
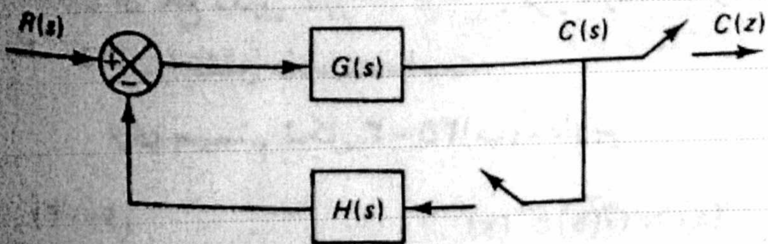
$$\rightarrow E^*(s) = R^*(s) - GH^*(s)E^*(s)$$

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1+GH^*(s)} \qquad C^*(s) = G^*(s)E^*(s)$$

$$C^*(s) = \frac{G^*(s)R^*(s)}{1+GH^*(s)} \longrightarrow \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+GH(z)}$$

ص ۲۱

جدول ۳-۱ پنج آرایه نوعی برای سیستم‌های کنترل زمان‌گسسته حلقه‌بسته

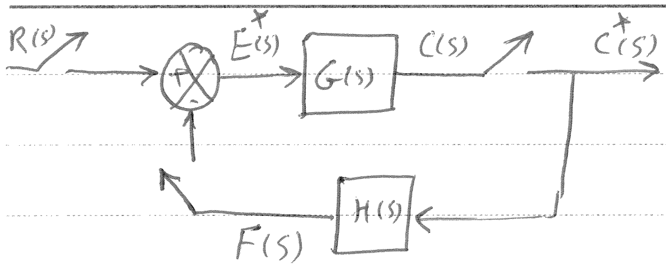
	$C(z) = \frac{G(z)R(z)}{1 + GH(z)}$
	$C(z) = \frac{G(z)R(z)}{1 + G(z)H(z)}$
	$C(z) = \frac{G_1(z)G_2(z)R(z)}{1 + G_1(z)G_2H(z)}$
	$C(z) = \frac{G_2(z)G_1R(z)}{1 + G_1G_2H(z)}$
	$C(z) = \frac{GR(z)}{1 + GH(z)}$

Subject :

Year .　Month .　Date .　( )

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال



$$E^*(s) = R^*(s) - F^*(s)$$

$$= R^*(s) - C^*(s)H^*(s) \quad ①$$

$$C^*(s) = E^*(s) \times G^*(s) \quad ②$$

①,② $\quad C^*(s) = \left(R^*(s) - C^*(s)H^*(s)\right) G^*(s)$

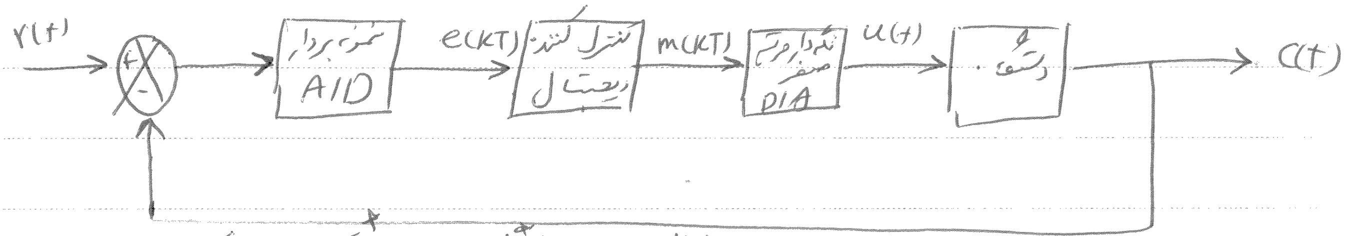
$$C^*(s)\left(1 + H^*(s)G^*(s)\right) = R^*(s)G^*(s)$$

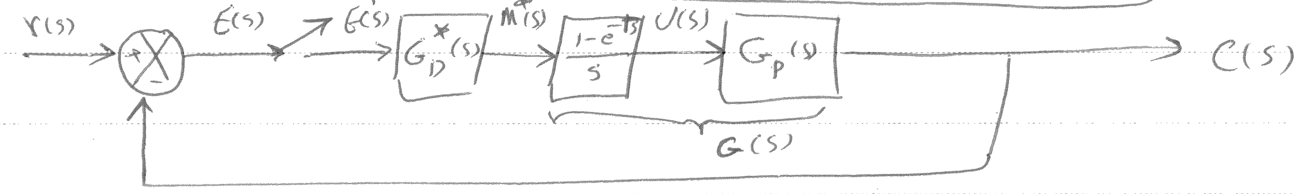
$$\rightarrow C^*(s) = \frac{R^*(s)G^*(s)}{1 + H^*(s)G^*(s)} \rightarrow C(z) = \frac{R(z)G(z)}{1 + H(z)G(z)}$$

$$\rightarrow \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + H(z)G(z)}$$

جدول ۲-۱ شرح نوع مختلف سیستم‌های کنترل برای انتشار داده.

تابع تبدیل پالسی یک کنترل کننده دیجیتال





$$m(k) + a_1 m(k-1) + a_2 m(k-2) + \cdots a_n m(k-n) = b_0 e(k) + b_1 e(k-1) + \cdots b_n e(k-n)$$

تبدیل Z

$$(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots a_n z^{-n}) M(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots b_n z^{-n}) E(z)$$

$$G_D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots a_n z^{-n}}$$

از این ابتدا ستاره دار تعریف شده

$$G(s) = \underbrace{\frac{1-e^{-Ts}}{s}}_{\text{تابع تبدیل نگه‌دار}} \times \underbrace{G_p(s)}_{\text{تابع تبدیل پلانت}} \rightarrow C(s) = G(s)\, \underbrace{G_D^*(s)\, E^*(s)}$$

$$C^*(s) = G^*(s)\, G_D^*(s)\, E^*(s)$$

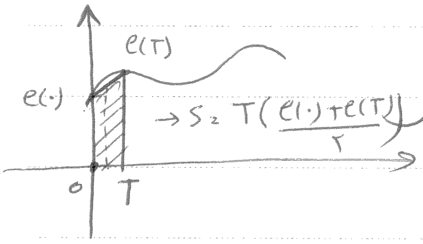
$$\rightarrow C(z) = G(z)\, G_D(z)\, E(z) \quad , \quad E(z) = R(z) - C(z)$$

$$C(z) = G_D(z)\, G(z)\, [R(z) - C(z)]$$

$$\rightarrow \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)\, G(z)}{1 + G_D(z)\, G(z)}$$

تابع تبدیل پالس یک کنترل کننده PID دیجیتال

$$m(t) = K\left[e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)\,dt + T_d \frac{de(t)}{dt}\right]$$



با تقریب انتگرال با مجموع ذوزنقه‌ای و مشتق با تفاضل دو نقطه‌ای خواهیم داشت:

$$m(kT) = K\left\{e(kT) + \frac{T}{T_i}\left[\frac{e(0)+e(T)}{2} + \frac{e(T)+e(2T)}{2} + \cdots \frac{e((k-1)T)+e(kT)}{2}\right] + T_d\,\frac{e(kT)-e((k-1)T)}{T}\right\}$$

ص ۸۰

۲۰ $\sum_{n=1}^{n} x(k) = \frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$

$$= K\left\{e(kT) + \frac{T}{T_i}\sum_{h=1}^{k}\frac{e((h-1)T)+e(hT)}{2} + \frac{T_d}{T}\left(e(kT) - e((k-1)T)\right)\right\}$$

جدا خواهد شد

$$M(z) = K\left\{E(z) + \frac{T}{2T_i} \times \frac{1}{1-z^{-1}} \times (z^{-1}+1)E(z) + \frac{T_d}{T}(1-z^{-1})E(z)\right.$$

$$= K\left[1 - \frac{T}{2T_i} + \frac{T}{T_i(1-z^{-1})} + \frac{T_d}{T}(1-z^{-1})\right]E(z)$$

$$= \left[K_P + \frac{K_I}{1-z^{-1}} + K_D(1-z^{-1})\right]E(z)$$

ص ۴۰

$$K_p = K - \frac{KT}{2T_i} = K - \frac{K_I}{2}$$ بهره تناسبی

$$K_I = \frac{KT}{T_i}$$ بهره انتگرال گیر

توجه ① بهره انتگرال گیر در تبدیل در بهره تناسبی اثر دارد

$$K_D = \frac{KT_d}{T}$$ بهره مشتق گیر.

$$G_D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = K_p + \frac{K_I}{1-z^{-1}} + K_D(1-z^{-1})$$

توجه ② تغییر سرعت نمونه برداری بر روی ضرایب کنترل کننده هم اثر دارد.

شکل فوق شکل موقعیتی (positional form) کنترل کننده PID را نشان

شکل سرعتی که در آن بجای $m(kT)$ ، $\nabla m(kT)$ مد نظر قرار می گیرد.

این رابطه از رابطه $m(kT)$ قابل دستیابی است

$$\nabla m(kT) = m(kT) - m((k-1)T)$$

$$= K\Big\{ e(kT) - e((k-1)T) + \frac{T}{2T_i}\big[e(kT) + e((k-1)T)\big] + \frac{T_d}{T}\big[e(kT) - 2e((k-1)T) + e((k-2)T)\big]\Big\}$$

$$= K\Big\{ e(kT) - e((k-1)T) + \underbrace{\frac{T}{T_i}}_{K_I/K} e(kT) \underbrace{- \frac{T}{2T_i} e(kT) + \frac{T}{2T_i} e((k-1)T)}_{-\frac{K_I}{2K}} + \frac{T_d}{T}\big[e(kT) - 2e((k-1)T) + e((k-2)T)\big]\Big\}$$

$$= \Big\{\underbrace{\left(K - \frac{TK}{2T_i}\right)}_{K_p}\big[e(kT) - e((k-1)T)\big] + \underbrace{\frac{TK}{T_i}}_{K_I} e(kT) + \underbrace{\frac{T_d K}{T}}_{K_D}\big[e(kT) - 2e((k-1)T) + e((k-2)T)\big]$$

$$K_I = \frac{TK}{T_i}, \quad K_p = K - \frac{K_I}{2}$$

$$K_D = \frac{T_d K}{T}$$

ص ٤

Subject :
Year . Month . Date . ( )

با یک فرض که معمولاً تغییرات ورودی کم بود. یعنی لحظه‌ای است در تشریح سیگنال ورودی ثابت را شود و می‌توان فرض کرد.

$$r(kT) = r((k-1)T) = r((k-2)T)$$

حال $e(kT) = \underbrace{r(kT)}_{\text{ورودی}} - \underbrace{c(kT)}_{\text{خروجی}}$ و داریم

$$\nabla m(kT) = K_p[\cancel{r(kT)} - \cancel{r((k-1)T)} - c(kT) + c((k-1)T)]$$

$$+ K_I[r(kT) - c(kT)] + K_D[\cancel{r(kT)} - \cancel{2r((k-1)T)} +$$

$$\cancel{r((k-2)T)} - c(kT) + 2c((k-1)T) - c((k-2)T)]$$

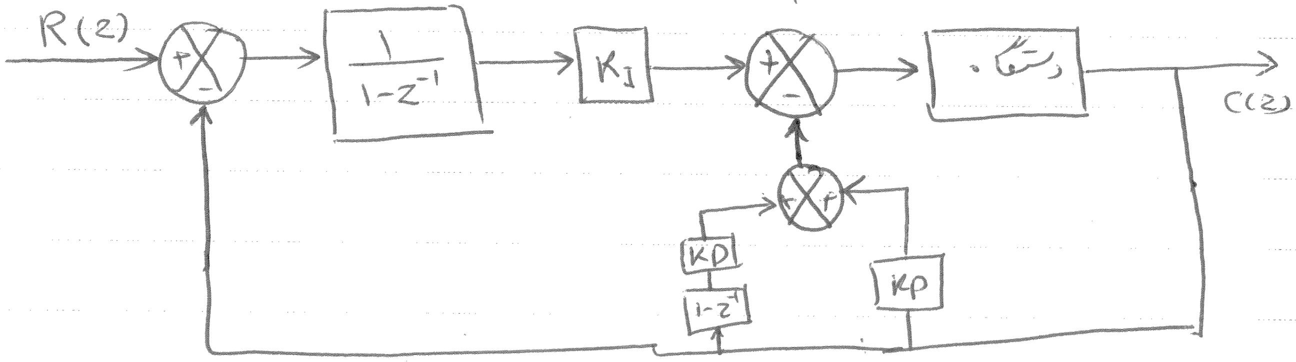
$$= -K_p[c(kT) - c((k-1)T)] + K_I[r(kT) - c(kT)]$$

$$- K_D[c(kT) - 2c((k-1)T) + c((k-2)T)]$$

$\longrightarrow$

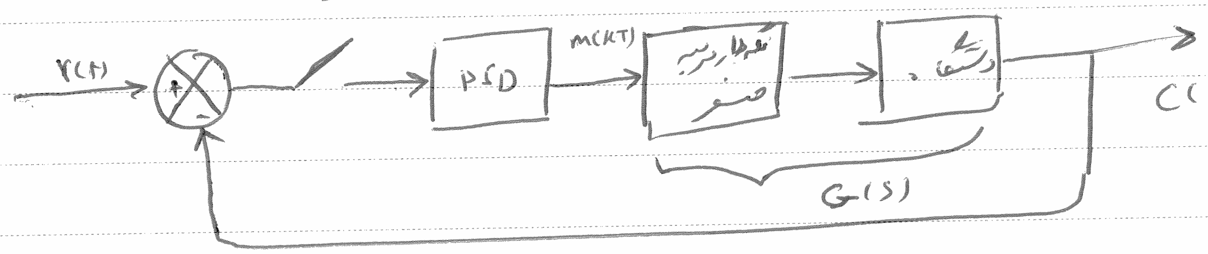
$$(1-z^{-1})M(z) = -K_p(1-z^{-1})C(z) + K_I[R(z) - C(z)]$$
$$- K_D(1 - 2z^{-1} + z^{-2})C(z)$$

$$M(z) = -K_p C(z) + K_I \frac{R(z) - C(z)}{1 - z^{-1}} - K_D(1-z^{-1})C(z)$$



شکل سیستم کنترل با کنترل کننده PID دیجیتال وضعیتی نشان داده شده است
تابع تبدیل $G_p(s)=\frac{1}{s(s+1)}$ در دوره نمونه برداری $T=1s$ نگهدار مرتبه صفر استفاده شده است

$$G_h(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}=\frac{1-e^{-s}}{s}$$

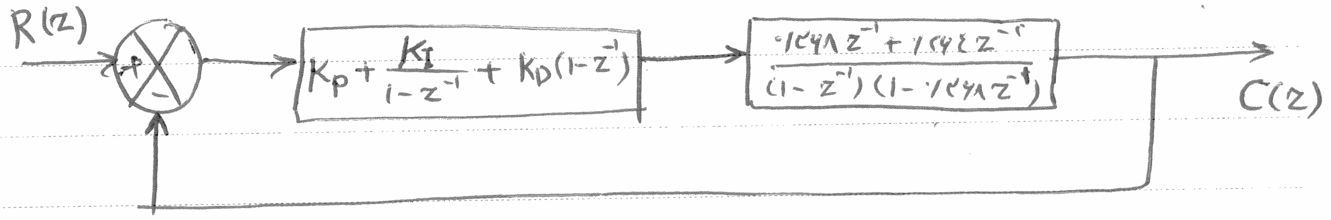


$$\mathcal{Z}[G(s)]=\mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-s}}{s}\times\frac{1}{s(s+1)}\right]$$

$$=\mathcal{Z}\left[(1-e^{-s})\times\left(\frac{-1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1}\right)\right]$$

$$=\mathcal{Z}\left[\frac{-1+e^{-s}}{s}\right]+\mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-s}}{s^2}\right]+\mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-s}}{s+1}\right]$$

$$=(1-z^{-1})\times\left\{\frac{-1}{1-z^{-1}}+\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}+\frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}}\right\}=\frac{e^{-1}z^{-1}+(1-2e^{-1})z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-e^{-1}z^{-1})}$$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

۶-۳ بدست آوردن پاسخ بین لحظه‌های نمونه برداری سیستم

اگر سرعت نمونه برداری بالا باشد می‌توان از همان فرض نگه دارنده مرتبه صفر استفاده کرد.
ولی چنانچه لازم باشد می‌توان از روش‌های زیر کیفیت سیگنال خروجی را افزایش داد

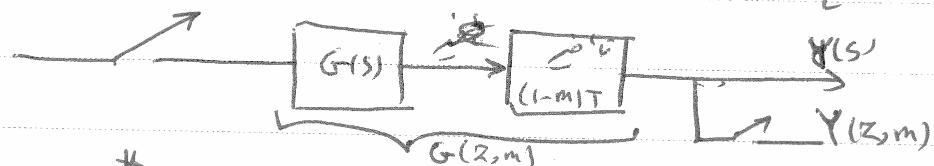
الف- روش تبدیل لاپلاس
ب) روش اصلاح شده تبدیل Z (مرتبه دوم و اصلاح شده)
ج) روش فضای حالت (ابتدای ترم)

این روشها در صورتیکه قابل استفاده است که نمونه گیری در خروجی با سرعت بیشتری قابل تغییر باشد.

الف - با:

$$C(s) = G(s)E^*(s) = \frac{G(s)R^*(s)}{1+GH^*(s)} \rightarrow c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{R^*(s)}{1+GH^*(s)}\right]$$

تبدیل Z اصلاح شده



$$G^*(s) = \mathcal{L}[g(t)\delta_T(t)]$$

$$Z_m[G(s)] = G(z,m) = G^*(s,m)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = \mathcal{L}[g(t-(1-m)T)\delta_T(t)]\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}$$

$$\mathcal{L}[g(t-(1-m)T)\delta_T(t)] = e^{-Ts}\mathcal{L}[\underbrace{g(t+mT)\delta_T(t)}_{\text{حاصلضرب دو تابع}}] = G^*(s,m)$$

$$\mathcal{L}[g(t+mT)\delta(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(p)\frac{e^{mTp}}{1-e^{-T(s-p)}}\,dp \leftarrow \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s-p)\,dp$$

با انتگرال کانولوشن در نیم صفحه سمت چپ با فرض محدود بودن انتگرال گیری

$$\mathcal{L}[g(t+mT)\delta_T(t)] = \sum\left[G(s)\ \text{در قطبهای}\ \frac{G(s)e^{mTs}z}{z-e^{Ts}}\ \text{مانده}\right]$$

$$G(z,m) = z^{-1}\sum\left[G(s)\ \text{در قطبهای}\ \frac{G(s)e^{mTs}}{z-e^{Ts}}\ \text{مانده}\right]$$

می‌توان گفت

$$G(z) = \lim_{m\to 0} z\,G(z,m)$$

$$Y(z,m) = G(z,m)X(z)$$

تبدیل z اصلاح شده را ، به تبدیل z می‌توان به فرم زیر نوشت

$$Y(z,m) = y_0(m) z^{-1} + y_1(m) z^{-2} + \dots$$

که در آن $y_k(m)$ نشان دهنده مقدار $y(t)$ در فاصله $t = kT$ تا $t = (k+1)T$

$$y_k(m) = y((k+m)T)$$

اگر تابع پیوسته باشد آنگاه

$$\lim_{m \to 1} y_{k-1}(m) = \lim_{m \to 0} y_k(m)$$

مثال تبدیل z اصلاح شده $G(s)$ را بدست آورید که در آن $G(s) = \frac{1}{s+a}$

$$G(z,m) = z^{-1}\left[s=-a \text{ در قطب } \frac{1}{s+a} \times \frac{e^{mTs} z}{z - e^{Ts}} \text{ مانده} \right] = z^{-1}\left\{ \lim_{s \to -a} \left[(s+a) \frac{1}{s+a} \frac{e^{mTs} z}{z - e^{Ts}} \right] \right\}$$

$$= z^{-1} \frac{e^{-maT} z^{-1}}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

۷-۳ تحقق کنترل کننده‌ها و فیلترهای دیجیتال

رسم دیاگرام بلوکی

$$\xrightarrow[X(z)]{x(k)} \boxed{z^{-1}} \xrightarrow[z^{-1}X(z)]{x(k-1)}$$

فرم کلی یک تابع تبدیل پالسی

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots a_n z^{-n}}$$

کنترل کننده PID

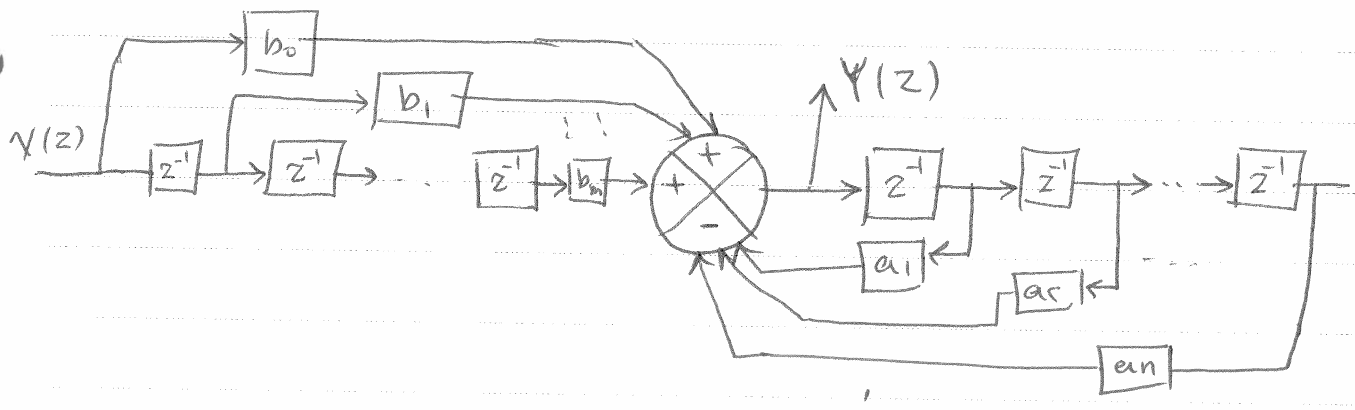
$$G_D(z) = \frac{(K_P + K_I + K_D) - (K_P + 2K_D) z^{-1} + K_D z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

$$= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = -1, \quad a_2 = 0 \\ b_0 = K_P + K_I + K_D \\ b_1 = -(K_P + 2K_D), \quad b_2 = K_D \end{array}$$

<u>برنامه سازی مستقیم</u>

$$Y(z)(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots a_n z^{-n}) = X(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots b_n z^{-m})$$

$$\hookrightarrow Y(z) = X(z)[b_0 + b_1 z^{-1} + \dots b_n z^{-m}] - Y(z)[a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots a_n z^{-n}]$$



کاهش تعداد جعبه‌ها (عناصر) تأخیر

برنامه سازی استاندارد.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{H(z)} \times \frac{H(z)}{X(z)}$$

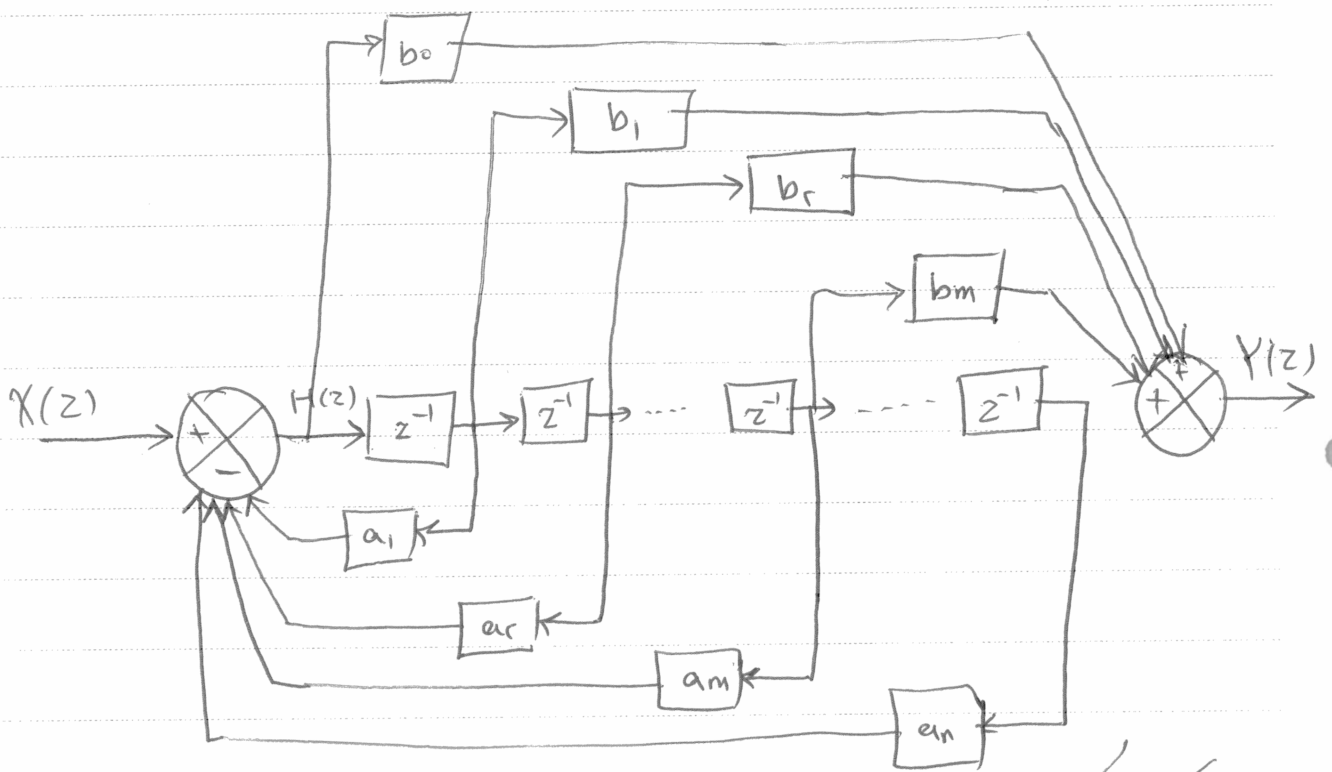
$$\frac{Y(z)}{H(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots b_m z^{-m}$$

$$\frac{H(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + \dots a_n z^{-n}}$$

$$Y(z) = b_0 H(z) + b_1 z^{-1} H(z) + b_2 z^{-2} H(z) + \dots b_m z^{-m} H(z)$$

$$X(z) = H(z) + a_1 z^{-1} H(z) + a_2 z^{-2} H(z) + \dots a_n z^{-n} H(z)$$

$$\hookrightarrow H(z) = X(z) - \left[a_1 z^{-1} H(z) + a_2 z^{-2} H(z) + \dots a_n z^{-n} H(z) \right]$$



در تحقق کنترل‌کننده‌ها سه منبع خطا وجود دارد

۱- خطای ناشی از کوانتیزاسیون

۲- خطای ناشی از انباشتگی خطای گرد شدن در عملیات محاسباتی

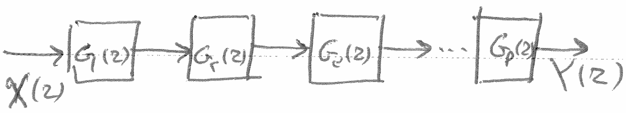
۳- خطای ناشی از کوانتیزه کردن ضرایب a_i و b_i

Subject:
Year. Month. Date. ( )

خصوصیات سیستم را می‌توان با تجزیه ریاضی تابع تبدیل با یکی از سه روش زیر نمایش داد.

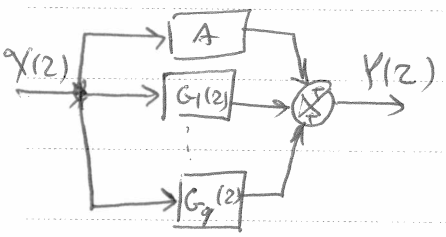
۱- برنامه‌سازی سری ۲- برنامه‌سازی موازی ۳- برنامه‌سازی نردبانی

برنامه‌سازی سری



$$G(z) = G_1(z) \times G_2(z) \times \cdots G_p(z)$$

برنامه‌سازی موازی



$$G(z) = A + G_1(z) + G_2(z) + \cdots G_q(z)$$

برنامه‌سازی نردبانی

$$G(z) = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{1}{B_2 z + \cfrac{1}{A_2 + \cdots \cfrac{1}{B_n z + \cfrac{1}{A_n}}}}}}$$

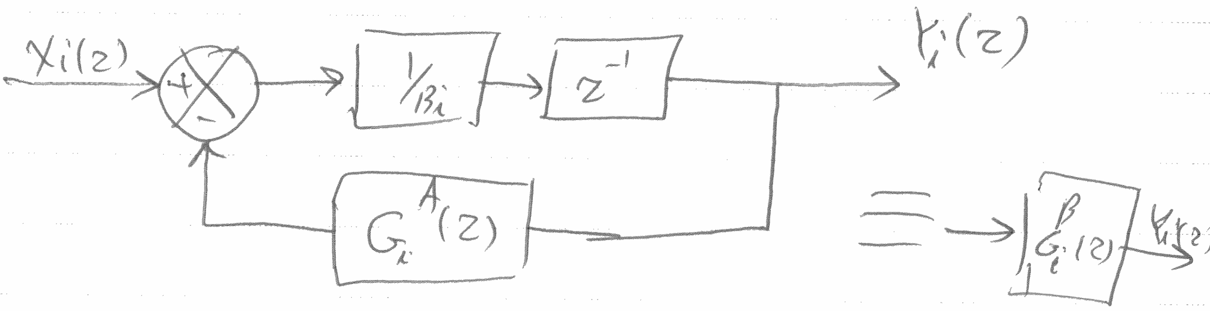
$$\begin{cases} G(z) = A_0 + G_1^B(z) \\ G_i^B(z) = \dfrac{1}{B_i z + G_i^A(z)} \\ G_i^A(z) = \dfrac{1}{A_i + G_{i+1}^B(z)} \end{cases}$$

$$G_i^B(z) = \frac{Y_i(z)}{X_i(z)} = \frac{1}{B_i z + G_i^A(z)}$$

$$G_i^A(z) = \frac{Y_i(z)}{X_i(z)} = \frac{1}{A_i + G_{i+1}^B(z)}$$

$$Y_i(z) \times B_i z + Y_i(z) \times G_i^A(z) = X_i(z) \quad \times \frac{1}{B_i z}$$

$$Y_i(z) = \frac{1}{B_i} z^{-1}\left(X_i(z) - Y_i(z)\, G_i^A(z)\right)$$

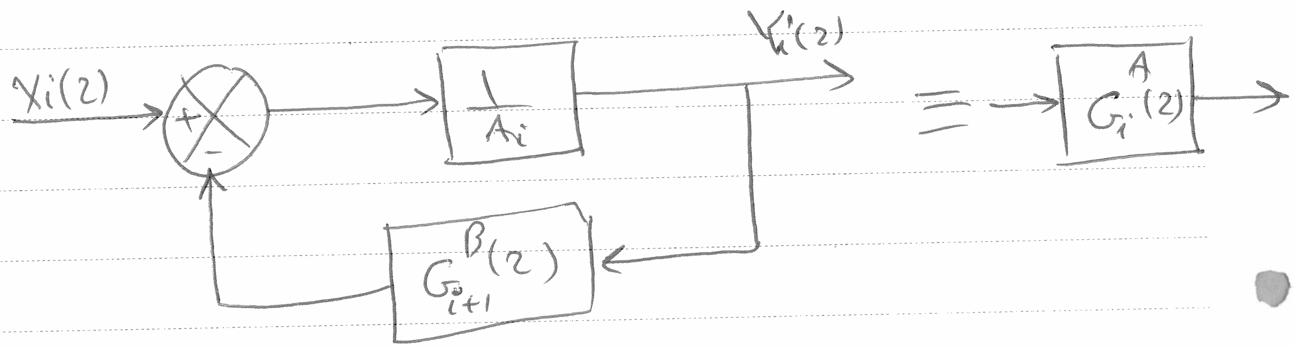


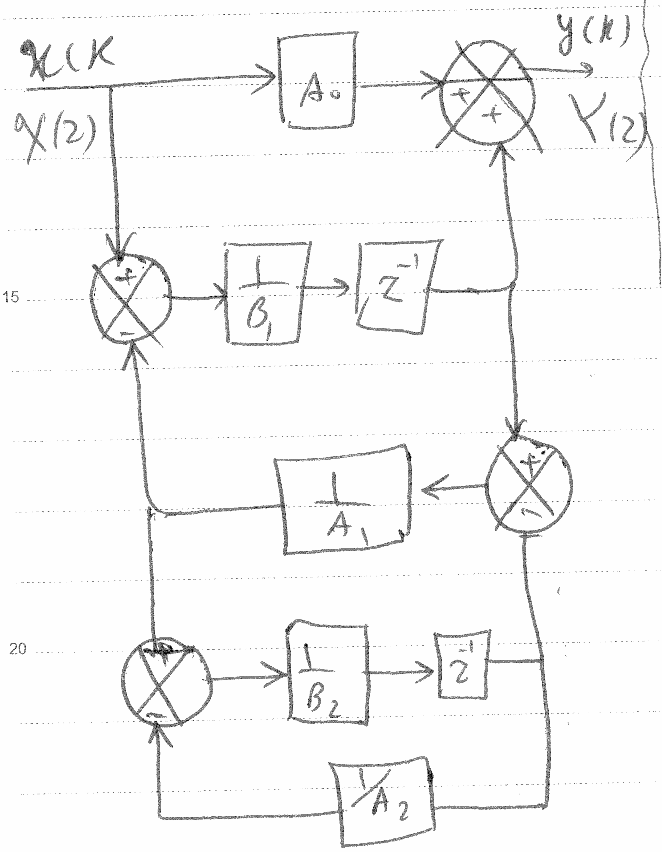
Subject :

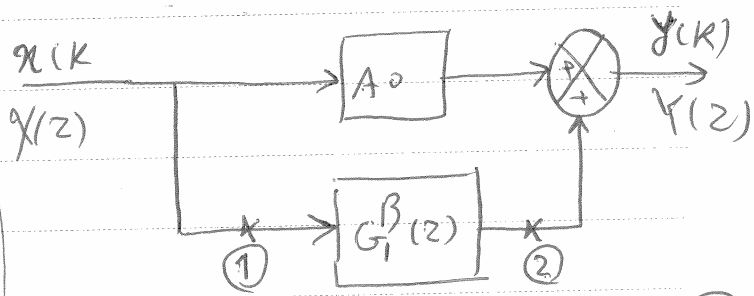
Year .　Month .　Date .　( )

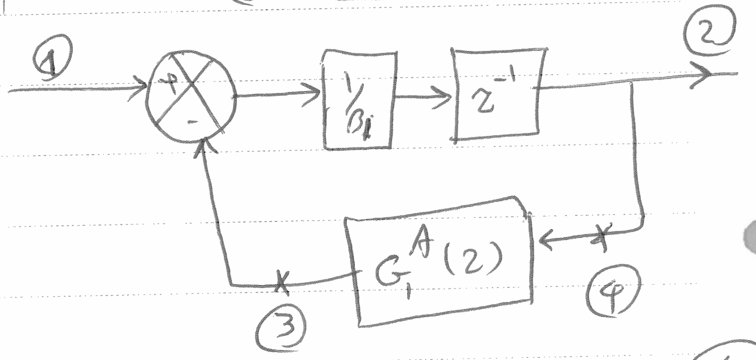
$$G_i^A(z) = \frac{Y_i(z)}{X_i(z)} = \frac{1}{A_i + G_{i+1}^B(z)}$$

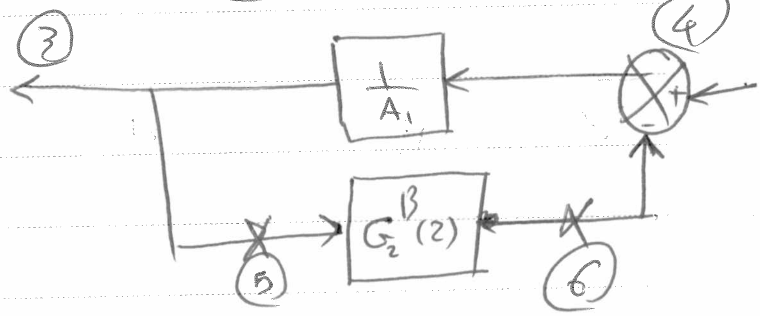
$$\rightarrow \quad Y_i(z) = \frac{1}{A_i}\left(X_i(z) - G_{i+1}^B(z)\, Y_i(z)\right)$$



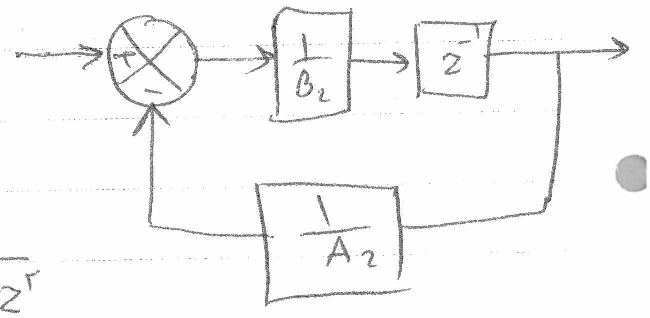








$$\frac{Y(z)}{X(z)} = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{1}{B_2 z + \cfrac{1}{A_2}}}}$$



$$= \frac{A_0A_1 + A_0A_2 + A_0A_1A_2B_2 z}{1 + (A_1B_1 + A_2B_1 + A_2B_2)z + A_1A_2B_1B_2 z^2}$$

ε9

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{A_0 C + A_1 + A_2 + A_1 A_2 B_2 z}{\underbrace{1 + (A_2B_2 + A_2B_1 + A_1B_1)z + A_1A_2B_1B_2 z^2}_{C}}$$

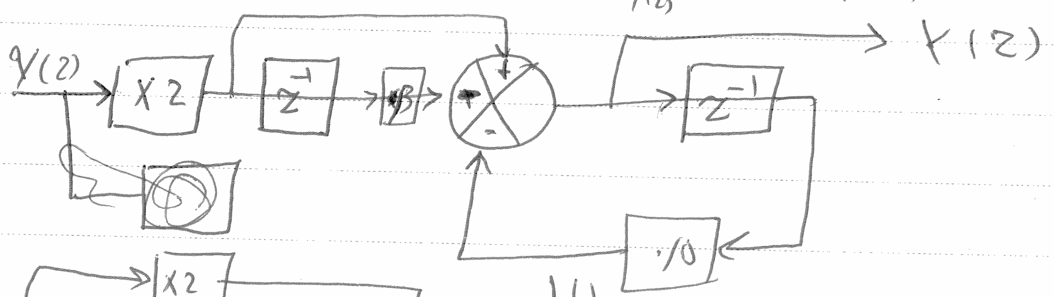
مثال

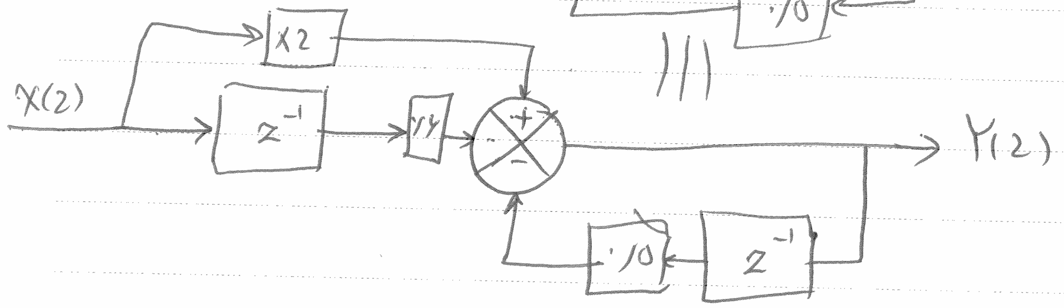
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 - 0.4 z^{-1}}{1 + 0.5 z^{-1}}$$

برنامه سازی مستقیم

$$Y(z) + 0.5 z^{-1} Y(z) = 2X(z) - 0.4 z^{-1} X(z)$$

$$Y(z) = (\cancel{\ldots}\ 2X(z) - 0.4 z^{-1} X(z) - 0.5 z^{-1} Y(z)$$





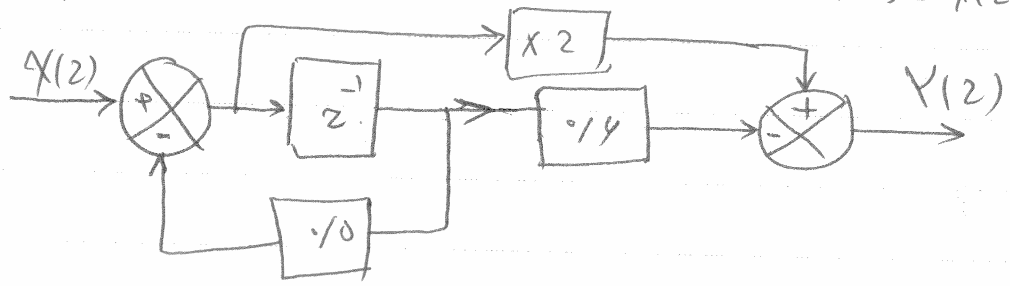
برنامه سازی استاندارد

$$\frac{Y(z)}{H(z)} \times \frac{H(z)}{X(z)} = \frac{2 - 0.4 z^{-1}}{1 + 0.5 z^{-1}} \rightarrow \frac{Y(z)}{H(z)} = 2 - 0.4 z^{-1}$$

$$\frac{H(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + 0.5 z^{-1}}$$

$$Y(z) = 2H(z) - 0.4 z^{-1} H(z)$$

$$X(z) = H(z) + 0.5 z^{-1} H(z) \rightarrow H(z) = X(z) - 0.5 z^{-1} H(z)$$



فیلتر با پاسخ ضربه بی پایان و فیلتر با پاسخ ضربه پایاندار

اگر تابع تبدیل پالس به شکل زیر باشد جزو بی پایان

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots a_n z^{-n}} \qquad n > m \quad a_i \neq 0$$

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_n y(k-n) + b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots b_m x(k-m)$$

بنابراین فیلتر دیجیتالی بازگشتی با پاسخ ضربه بی پایان می باشد.

اگر تابع تبدیل پالس به شکل زیر باشد پایاندار

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots b_m z^{-m}$$

$$y(k) = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots b_m x(k-m)$$

فیلتر با پاسخ ضربه پایاندار یا غیر بازگشتی یا فیلتر میانگین متحرک

تحقق یک فیلتر با پاسخ ضربه پایاندار

فرض کنید $g(kT)$ پاسخ ضربه باشد

$$y(kT) = \sum_{h=0}^{k} g(hT)\, x(kT - hT)$$

$$= g(0)x(kT) + g(T)x((k-1)T) + \dots g(kT)x(0)$$

مشکل تحقق چنین رابطه این است که با افزایش k تعداد جملات افزایش می یابد

می توان تعداد این جملات را به N محدود کرد.

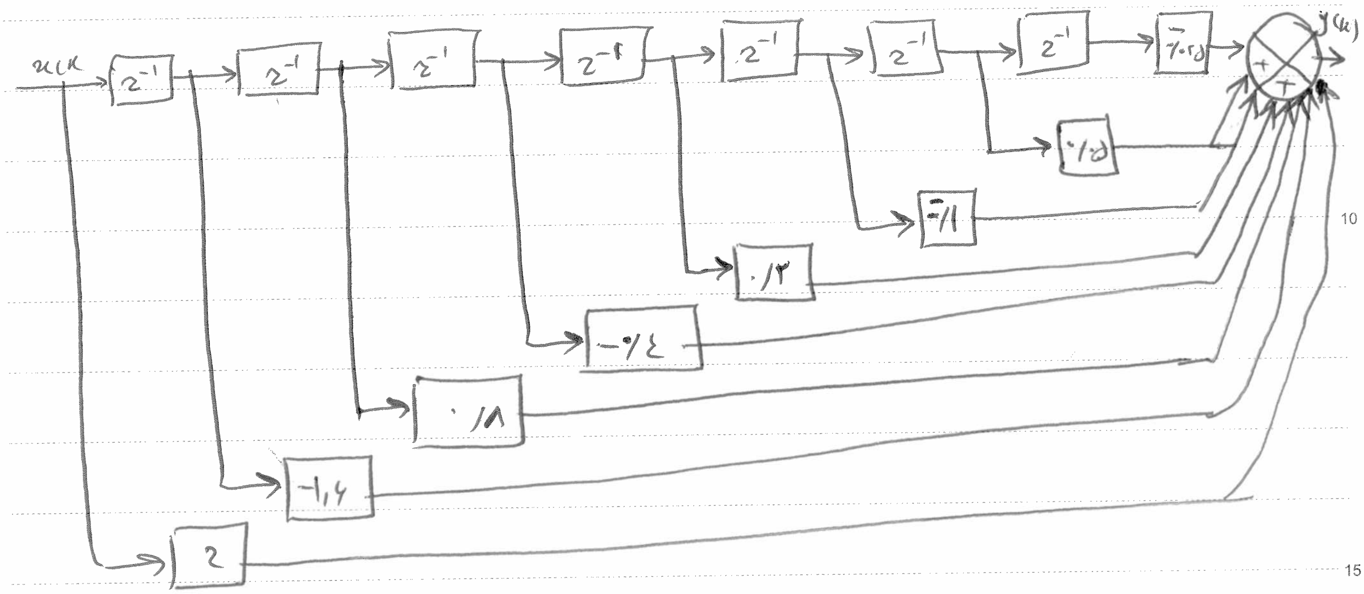
$$Y(z) = g(0)X(z) + g(T)z^{-1}X(z) + \dots g(NT)z^{-N}X(z)$$

تبدیل یک فیلتر بازگشتی به فیلتر غیر بازگشتی

$$G(z)=\frac{2-0.6z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}=2-1.6z^{-1}+0.8z^{-2}-0.4z^{-3}+0.2z^{-4}-0.1z^{-5}+0.05z^{-6}-0.025z^{-7}$$

تا ۸ جمله قطع کردیم تا بی نهایت ادامه دارد.

$$y(kT)=2x(kT)-1.6x((k-1)T)+0.8x((k-2)T)-0.4x((k-3)T)+0.2x((k-4)T)$$
$$-0.1x((k-5)T)+0.05x((k-6)T)-0.025x((k-7)T)$$



نگاشت میان صفحه S و صفحه Z

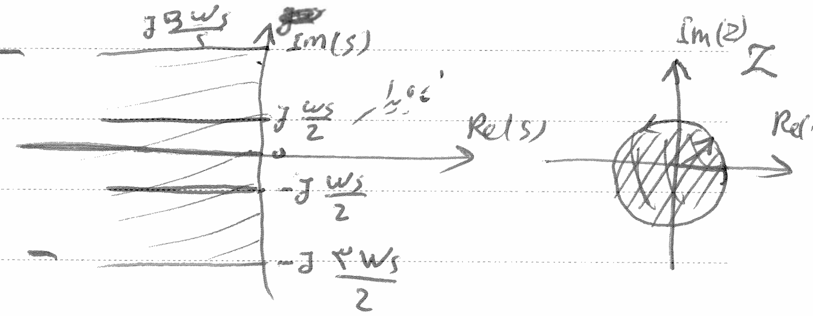
ص ۲۷۳

پایداری سیستم گسسته از روی مکان قطبهای حلقه بسته در صفحه z مشخص میشود.

- سمت راست، تکراری روی محور سمت

ناپایدار می شود

- نوار محدود سمت نوسانی دارم



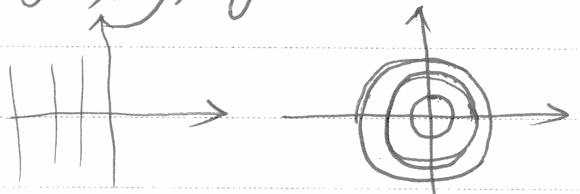
$$Z=e^{T\sigma+Tj\omega} \leftarrow s=\sigma+j\omega \qquad Z=e^{TS}$$

$$=e^{T\sigma}\times e^{j(T\omega+2\pi k)}$$

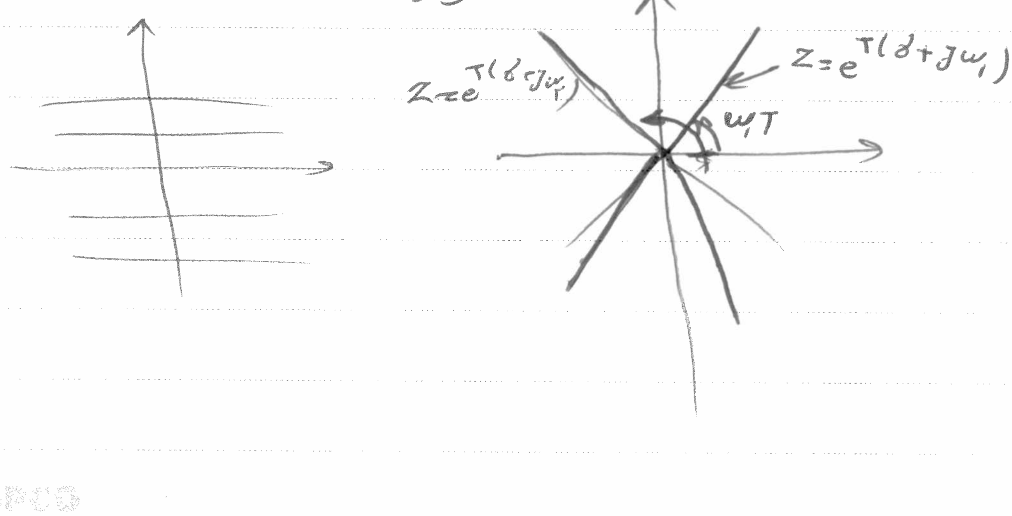
درنتیجه اگر $\sigma>0$ باشد $|z|=|e^{T\sigma}|<1$ و از آن هم پس هر تا 2π تغییر میکند اگر $T\omega=2k\pi+\varphi$ نقاط مکان در صفحه z خواهد بود که در صفحه s متناظر است.

مکانهای میرائی ثابت اگر $s=\sigma+j\omega$ ، $\sigma=c$ در صفحه s خطوط موازی محور $j\omega$

در صفحه z دایره‌ای به شعاع $e^{T\sigma}=e^{Tc}$



مکانهای فرکانس ثابت خطوط موازی محور حقیقی به یک خط شعاعی

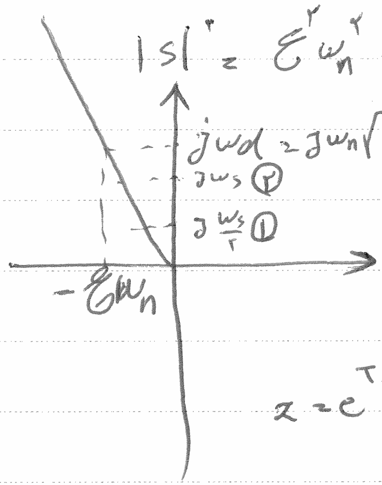


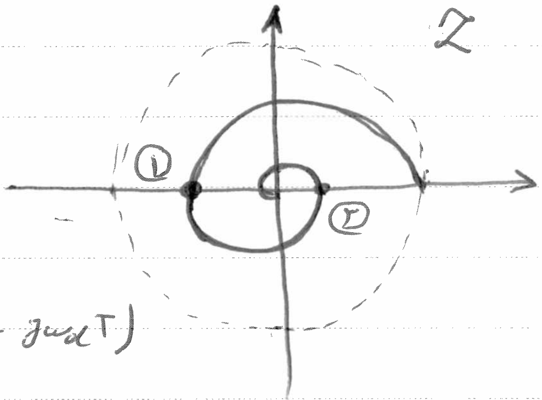
$0 \le \xi \le 1$

مکان‌های نسبت میرایی ثابت: $s = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_n + j\omega_d$

$0 \le \xi \le 1$ زیر میرا ، $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \rightarrow \phi = \tan^{-1}\frac{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{-\omega_n\xi} =$ نیم‌خط با زاویه ثابت

$|s|^2 = \xi^2\omega_n^2 + \omega_n^2(1-\xi^2) = \omega_n^2 \rightarrow |s| = \omega_n$





$z = e^{Ts} = \exp(-\xi\omega_n T + j\omega_d T)$

$$= \exp\left(\frac{-\xi\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \times \frac{2\pi}{\omega_s} + j\,2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s}\right)$$

$$\rightarrow |z| = \exp\left(-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \times \frac{\omega_d}{\omega_s}\right) \quad , \quad \angle z = 2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s}$$

یادآوری

$Js^2 + Bs + K = 0 \rightarrow \frac{K}{J} = \omega_n^2 \quad \frac{B}{J} = 2\xi\omega_n$

$\xi = \frac{B}{B_c}$ $\frac{\rightarrow \text{نسبت میرایی واقعی}}{\rightarrow \text{نسبت میرایی بحرانی}}$ $\quad B_c = 2\sqrt{JK}$

ریشه مکرر $\Delta = 0$ باشد.

$\Delta = B^2 - 4\sqrt{JK}$

۱- $0 \le \xi \le 1$ زیر میرا $\quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

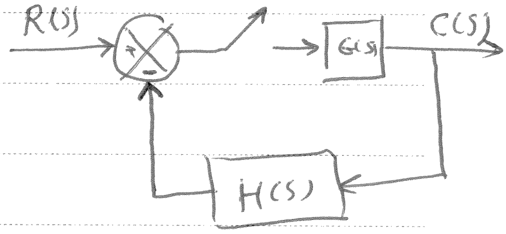
$\frac{1}{\xi\omega_n} = \tau$

۲- $\xi = 1$ میرایی بحرانی

۳- $\xi > 1$ فوق میرا

تحلیل پایداری سیستم‌های حلقه بسته در حوزه Z

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+GH(z)}$$

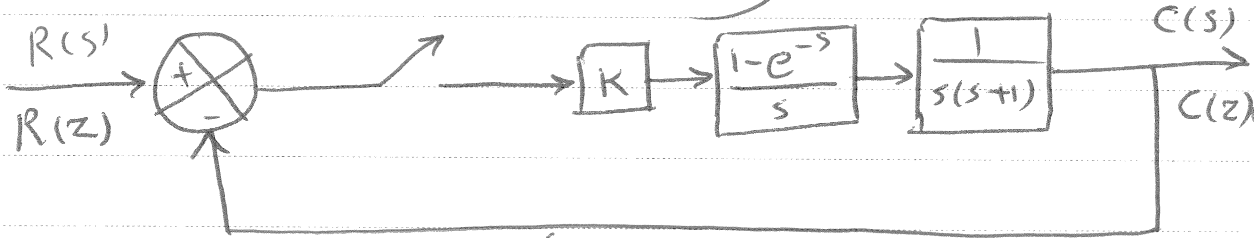


محل قطب‌های حلقه بسته در صفحه z یعنی ریشه‌های معادله $1+GH(z)$ پایداری را بیان کرد

۱- برای پایداری باید ریشه‌ها درون دایره واحد باشند.

۲- اگر یک قطب ساده در $z=1$ یا $z=-1$ (یا یک قطب ساده در $z=1$ و قطب دیگر در $z=-1$ باشد) سیستم پایدار بحرانی هستند. اگر یک جفت قطب مختلط مزدوج بر روی دایره واحد باشد سیستم پایدار بحرانی است. اگر قطب‌های روی دایره واحد مکرر باشند سیستم ناپایدار است.

۳- صفرهای حلقه بسته تاثیری بر پایداری ندارند.



$$G(s) = \frac{1-e^{-s}}{s} \times \frac{1}{s(s+1)} \rightarrow G(z) = \frac{۰٫۳۶۷۹z + ۰٫۲۶۴۲}{(z-۰٫۳۶۷۹)(z-1)}$$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)} \Rightarrow 1+G(z)=0$$

$$(z-۰٫۳۶۷۹)(z-1) + ۰٫۳۶۷۹z + ۰٫۲۶۴۲z = ۰$$

$$z_1 = ۰٫۵ + ۰٫۶۱۸۱j \quad , \quad z_2 = ۰٫۵ - ۰٫۶۱۸۱j$$

$$|z_1| = |z_2| < 1$$

سیستم با $k=1$ پایدار است

اگر $K > ۲٫۳۹۲$ سیستم ناپایدار خواهد بود.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

روشهای آزمودن پایداری مطلق

۱- آزمون پایداری جوری

آزمون جوری ساده‌تر از شور کان است

۲- آزمون شور-کان

۳- تبدیلات دوخطی توام شده با معیار پایداری راوث

آزمون پایداری جوری

فرض کنید $P(z)$ چند جمله‌ای مشخصه مورد نظر باشد

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots a_{n-1} z + a_n$$

ردیف	z^0	z^1	z^2	z^3	...	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
۱	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	...	a_2	a_1	a_0
۲	a_0	a_1	a_2	a_3	...	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
۳	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}		b_1	b_0	
۴	b_0	b_1	b_2	b_3		b_{n-2}	b_{n-1}	
۵	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	c_{n-5}		c_0		
۶	c_0	c_1	c_2	c_3		c_{n-2}		
⋮	⋮							
۲n-۵	p_3	p_2	p_1	p_0				
۲n-۴	p_0	p_1	p_2	p_3				
۲n-۳	q_2	q_1	q_0					

$$b_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, 2, \dots n-1$$

$$q_k \begin{vmatrix} p_3 & p_{2-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, 2$$

معیار پایداری با آزمون جوری: سیستم با معادله مشخصه $P(z) = 0$ داده شده با معادله (۱۰۸-۲) پایدار است اگر تمام شرایط زیر برآورده شوند.

۱- $|a_n| < |a_0|$

۲- $P(z)\big|_{z=1} > 0$

۳- $P(z)\big|_{z=-1} \begin{cases} > 0 & \text{برای } n \text{ زوج} \\ < 0 & \text{برای } n \text{ فرد} \end{cases}$

۴- $|b_{n-1}| > |b_0|$

$|c_{n-2}| > |c_0|$

$|q_2| > |q_0|$

مثال: پایداری معادله مشخصه زیر را بررسی کنید

$$P(z) = z^4 - 1.2z^3 + 0.07z^2 + 0.3z - 0.08$$

$a_0 = 1 \quad a_1 = -1.2 \quad a_2 = 0.07 \quad a_3 = 0.3 \quad a_4 = -0.08$

	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
۱	−۰/۰۸	۰/۳	۰/۰۷	−۱/۲	۱
۲	۱	−۱/۲	۰/۰۷	۰/۳	−۰/۰۸
۳	−۰/۹۹۴	۱/۱۷۶	−۰/۰۷۵۶	−۰/۲۰۴	
۴	−۰/۲۰۴	−۰/۰۷۵۶	۱/۱۷۶	−۰/۹۹۴	
۵	۰/۹۴۶	−۱/۱۸۴	۰/۳۱۵		
۶	~~۰/۳۱۵~~	~~−۱/۱۸۴~~	~~۰/۹۴۶~~		

۱- $0.08 < 1$

۲- $P(1) = 0.09 > 0$

۳- $P(-1) = 1.89 > 0 \quad n = 4$

۴) $0.994 > 0.204$

$0.946 > 0.315$

تمام شرایط جوری برآورده شده است. تمام ریشه‌ها درون دایره واحد قرار گرفته است.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال سیستم زمان گسسته‌ای با پس‌خور واحد را در نظر بگیرید (با دوره نمونه‌برداری $T=1$) که تابع تبدیل ذاتی حلقه‌باز آن به صورت زیر است

$$G(z) = \frac{K(0.3679z + 0.2642)}{(z-0.3679)(z-1)}$$

مطلوب است محدوده K برای داشتن پایداری

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{K(0.3679z + 0.2642)}{z^2 + (0.3679K - 1.3679)z + 0.3679 + 0.2642K}$$

$$P(z) = \underbrace{z^2}_{a_0 = 1} + (0.3679K - 1.3679)z + \underbrace{0.3679 + 0.2642K}_{a_2 = 0.3679 + 0.2642K} = 0$$

$$a_2 = |0.3679 + 0.2642K| < |a_0 = 1|$$

$$-0.3679 - 1 < 0.2642K < 1 - 0.3679 \rightarrow \frac{-1.3679}{0.2642} < K < \frac{0.6321}{0.2642}$$

$$-5.1775 < K < 2.3925$$

شرط دوم:

$$P(1) = 1 + (0.3679K - 1.3679) + 0.3679 + 0.2642K$$
$$= 0.6321K > 0 \longrightarrow K > 0$$

شرط سوم

$$P(-1) = 1 - (0.3679K - 1.3679) + 0.3679 + 0.2642K$$
$$= 2.7358 - 0.1037K > 0 \rightarrow K < 26.382$$

با ترکیب شروط فوق

$$0 < K < 2.3925$$

تحلیل پایداری با استفاده از تبدیلات دوخطی و معیار پایداری روث

در این روش با استفاده از یک تبدیل روش روث را به روش روث-هورویتز تبدیل می‌کنیم

اگر تبدیل دوخطی زیر استفاده بشود

$$Z = \frac{w+1}{w-1}$$

$$\hookrightarrow w = \frac{z+1}{z-1}$$

این تبدیل داخل دایره را به نیم صفحه چپ صفحه w می‌نگارد

$$|Z| < 1 \qquad w = \sigma + j\omega$$

$$\longrightarrow \left|\frac{w+1}{w-1}\right| = \left|\frac{\sigma + j\omega + 1}{\sigma + j\omega - 1}\right| < 1$$

$$\frac{(\sigma+1)^2 + \omega^2}{(\sigma-1)^2 + \omega^2} < 1 \rightarrow (\sigma+1)^2 + \cancel{\omega^2} < (\sigma-1)^2 + \cancel{\omega^2}$$

$$\rightarrow \sigma < 0$$

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots a_{n-1} z + a_n = 0$$

$$a_0\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^n + a_1\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^{n-1} + \dots a_{n-1}\left(\frac{w+1}{w-1}\right) + a_n = 0$$

با ضرب در $(w-1)^n$ بدست می‌آوریم

$$Q(w) = b_0 w^n + b_1 w^{n-1} + \dots b_{n-1} w + b_n = 0$$

می‌توان معیار پایداری روث را به همان روش سیستم‌های پیوسته اعمال کرد.

w^n	b_0	b_2	b_4	b_6	...
w^{n-1}	b_1	b_3	b_5	b_7	...
w^{n-2}	c_1	c_2	c_3	c_4	...
w^{n-3}	d_1	d_2	d_3	d_4	...
$\vdots$	$\vdots$				
w^1	f_0				
w^0	g_0				

$$c_1 = \frac{b_1 b_2 - b_0 b_3}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 b_4 - b_0 b_5}{b_1}$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_2}{c_1}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

پایداری روش هرویتس

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

$a_n \neq 0$ ریشه‌های صفر حذف شده‌اند

- تمام ضرایب باید مثبت باشد.

- اگر همه ضرایب مثبت باشند آنگاه جدول الگوی صفحه قبل مرتب می‌کنیم

- معیار پایداری راث بیان می‌کند تعداد ریشه‌های معادله با بخش حقیقی مثبت برابر با تعداد تغییرات علامت ضرایب ستون اول است