فصل چهارم

طراحی سیستم‌های کنترل دیجیتال گسسته با روش‌های تبدیل

چهار روش

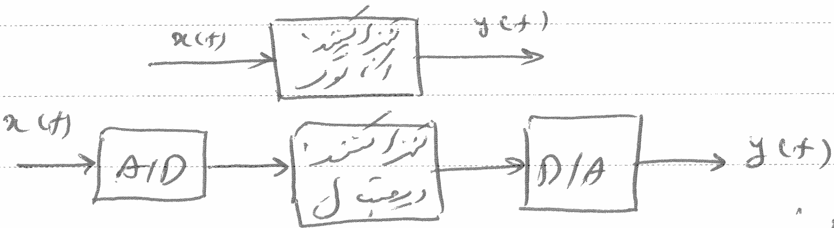
۱- روش غیرمستقیم — طراحی کنترل کننده پیوسته و تبدیل آن به گسسته

۲- روش مکان ریشه

۳- روش پاسخ فرکانسی

۴- روش تحلیلی

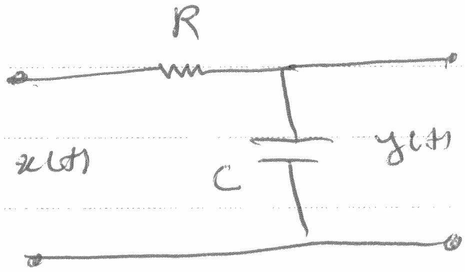
بدست آوردن معادل‌های زمانی گسسته فیلترهای آنالوگ پیوسته



مشخصه‌های پاسخ گذرا و پاسخ فرکانسی باید نزدیک به هم باشند.

گسسته کردن یک فیلتر آنالوگ پیوسته

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{RCs+1} = \frac{a}{s+a}$$

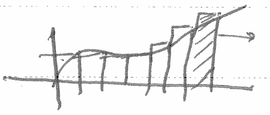


$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = ax(t)$$

$$\int_0^t \frac{dy(t)}{dt}\,dt = -a\int^t y(t)\,dt + a\int^t x(t)\,dt \rightarrow y(kT) - y((k-1)T) = -a\int^{kT} y(t)\,dt + a\int^{kT} x(t)\,dt$$

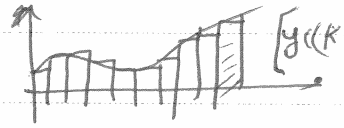
روشهای بدست آوردن معادل گسسته

۱- روش تفاضل معکوس



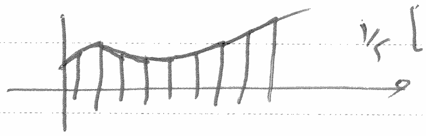
$[y(kT)]T$

۲- روش تفاضل مستقیم



$[y((k-1)T)]T$

۳- روش تبدیل دوخطی



$\frac{1}{2}[y(kT)+y((k-1)T)]T$

۴- روش تبدیل دوخطی با پیش‌تاب دادن فرکانس

۵- روش تغییرناپذیری ضربه

۶- روش تغییرناپذیری پله

۷- روش نگاشت قطب صفر تطبیق یافته

روش تفاضل معکوس :

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a}{s+a}$$

$$\frac{dy}{dt} + ay = ax \rightarrow \frac{y(kT) - y((k-1)T)}{T} + a y(kT) = a x(kT)$$

$$y(kT) = y((k-1)T) - aT[y(kT) - x(kT)] \rightarrow Y(z) = z^{-1}Y(z) - aT[Y(z) - X(z)]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G_D(z) = \frac{aT}{1-z^{-1}+aT} = \frac{a}{\frac{1-z^{-1}}{T} + a} \rightarrow s = \frac{1-z^{-1}}{T}$$

شرط پایداری

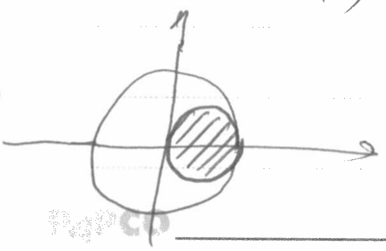
$$Re(s) < 0 \rightarrow Re\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right) < 0 \rightarrow Re\left(\frac{z-1}{Tz}\right) < 0$$

$$Re\left(\frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega}\right) < 0 \rightarrow Re\left(\frac{(\sigma + j\omega - 1)(\sigma - j\omega)}{(\sigma + j\omega)(\sigma - j\omega)}\right) < 0$$

$$Re\left(\frac{\sigma^2 - \sigma + \omega^2 + j\omega}{\sigma^2 + \omega^2}\right) < 0 \rightarrow \frac{\sigma^2 - \sigma + \omega^2}{\sigma^2 + \omega^2} < 0$$

$$(\sigma - 1/2)^2 + \omega^2 < \left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

دایره به مرکز $\sigma = 1/2$ و $\omega = 0$ و شعاع مساوی $1/2$



Subject: $t \to (k-1)T$ Year. Month. Date. ( ) $\frac{dy}{dt} = \frac{\dots}{T}$

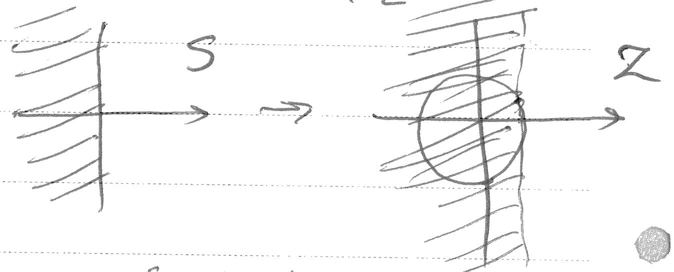
روش تفاضل مستقیم

$$\frac{dy(t)}{dt} + a y(t) = a x(t) \to \frac{y(kT) - y((k-1)T)}{T} + a \underline{y((k-1)T)} = a \underline{x((k-1)T)}$$

$$Y(z) = (1-aT) z^{-1} Y(z) + aT z^{-1} X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G_D(z) = \frac{aT z^{-1}}{1-(1-aT) z^{-1}} = \frac{a}{\frac{1-z^{-1}}{T z^{-1}} + a}$$

$$S = \frac{1-z^{-1}}{T z^{-1}}$$



$$Re\left[\frac{1-z^{-1}}{T z^{-1}}\right] < 0 \to Re\left[\frac{z-1}{T}\right] < 0$$

$$\to Re[z] < 1$$

ممکن است یک سیستم پایدار در صفحه s در صفحه z ناپایدار گردد

این روش هیچگاه به عنوان یک روش عمومی مورد استفاده قرار نمی‌گیرد.

روش تبدیل دوخطی

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[y(kT) + y((k-1)T)\right] T$$

$$y(kT) = y((k-1)T) - \frac{aT}{2}\left[y(kT) + y((k-1)T)\right] + \frac{aT}{2}\left[x(kT) + x((k-1)T)\right]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G_D(z) = \frac{\frac{aT}{2}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1}) + \frac{aT}{2}(1+z^{-1})} = \frac{a}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + a}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$S = \frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \qquad G_D(z) = G(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$Re\left(\frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) < 0 \rightarrow Re\left(\frac{z-1}{z+1}\right) < 0$$

$$z = \sigma + j\omega \qquad Re\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = Re\left[\frac{(\sigma-1+j\omega)(\sigma+1-j\omega)}{(\sigma+1+j\omega)(\sigma+1-j\omega)}\right]$$

$$= Re\left[\frac{\sigma^2-1+\omega^2+2\omega j}{(\sigma+1)^2+\omega^2}\right] < 0 \rightarrow \sigma^2-1+\omega^2 < 0$$

$\rightarrow \sigma^2+\omega^2 < 1$ که این یک دایره واحد است

درنتیجه یک فیلتر حوزه s پایدار یک فیلتر حوزه z پایدار خواهد بود

Subject:
Year. Month. Date. ( )

~~روش تبدیل دوخطی با پیش‌تاب دادن فرکانس~~

برای بررسی اثر تغییرات فرکانس $G(j\omega)$ و $G_D(e^{j\omega T})$ را مقایسه میکنیم

$$S = \frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \qquad s = j\omega_A \qquad z = e^{j\omega_D T}$$

$$j\omega_A = \frac{2}{T}\,\frac{1-e^{-j\omega_D T}}{1+e^{-j\omega_D T}} = \frac{2}{T}\,\frac{e^{j(\frac{1}{2})\omega_D T} - e^{-j(\frac{1}{2})\omega_D T}}{e^{j(\frac{1}{2})\omega_D T} + e^{-j(\frac{1}{2})\omega_D T}}$$

؟ ؟

$$= \frac{2}{T}\,\frac{2j\sin(\omega_D T/2)}{2\cos(\omega_D T/2)} = j\frac{2}{T}\tan\frac{\omega_D T}{2}$$

پس در این تبدیل این تغییرات فرکانس ایجاد میشود

برای اصلاح این اثر باید در فرکانس این ضریب را اصلاح کرد. فرکانس قطع فیلتر پایین گذر

$$G(s) = \frac{a}{s+a} \rightarrow G(j\omega) = \frac{a}{j\omega + a}$$

$$G(s') = \frac{\frac{2}{T}\tan\frac{aT}{2}}{s' + \frac{2}{T}\tan\frac{aT}{2}}$$

حال می‌توان تبدیل دوخطی را اعمال داد.

مثال $G(s) = \frac{10}{s+10}$ $T = 0.2$

$$G_D(z) = \frac{\frac{2}{T}\tan\frac{10T}{2}}{s + \frac{2}{T}\tan\frac{10T}{2}} \;\Bigg|\; s = \frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{\frac{2}{T}\tan\frac{10T}{2}}{\frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \frac{2}{T}\tan\frac{10T}{2}}$$

$T = 0.2$

$$= \frac{\tan\frac{2}{2}}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \tan\frac{2}{2}} = \frac{1.5574}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1.5574} = \frac{0.609(1+z^{-1})}{1+0.218z^{-1}}$$

ص ۹۸

روش تغییرناپذیری ضربه

$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

فیلتر زمان گسسته معادل $G_D(z)$ به دست آمده در روش تغییرناپذیری ضربه، فیلتری است که پاسخ ضربه آن $g_D(kT) = Z^{-1}[G_D(z)]$ مساوی T برابر پاسخ ضربه پیوسته فیلتر $g(t) = L^{-1}[G(s)]$ باشد

$$g_D(kT) = T\, g(t)\Big|_{t=kT}$$

$$G_D(z) = Z[g_D(kT)] = T\, Z[g(t)] = T\, \cancel{Z}(\cancel{G}(s))$$

$$= T\, G(z) \qquad G(s) = \frac{a}{s+a}$$

$$G_D(z) = T\, G(z) = \frac{Ta}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

به علت اینکه فیلتر زمان گسسته معادل $G_D(z)$ با تبدیل Z فیلتر زمان پیوسته $G(s)$ متناسب است روش تغییرناپذیری ضربه را روش تبدیل Z نیز می‌گویند

اگر فرکانس نمونه‌برداری به اندازه کافی بزرگ باشد مشخصات پاسخ فرکانسی $G_D(z)$ بسیار نزدیک فیلتر زمان پیوسته خواهد بود.

روش تغییرناپذیری پله

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G_D(z) \qquad \frac{y(s)}{u(s)} = G(s)$$

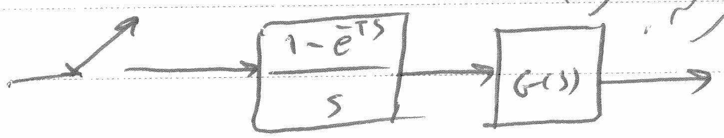
$$y(t) = Z^{-1}\left[G_D(z) \times \frac{1}{1-z^{-1}}\right] = L^{-1}\left[G(s) \times \frac{1}{s}\right]_{t=kT}$$

$$\rightarrow G_D(z) \times \frac{1}{1-z^{-1}} = Z\left\{L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]\right\}$$

$$G_D(z) = (1-z^{-1})\, Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$= Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\, G(s)\right]$$

مشاهده می‌شود که سمت راست همان فیلتر $G(s)$ است که قبل از آن یک نمونه‌بردار و نگهدار ساختگی قرار گرفته باشد.



$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

$$G_D(z) = (1-z^{-1})\, Z\left[\frac{G(s)}{s}\right] = (1-z^{-1})\, Z\left[\frac{a}{s(s+a)}\right]$$

$$= (1-z^{-1})\, Z\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right] = (1-z^{-1})\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}\right)$$

$$= \frac{(1-e^{-aT})\, z^{-1}}{1-e^{-aT} z^{-1}}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

روش نگاشت قطب-صفر تطبیق یافته

در این روش قطبها و صفرهای تابع تبدیل $G(s)$ به $G(z)$ نگاشته می‌شود

قطبها و صفرهای پایدار در $s=-b$ به $z=e^{-bT}$ نگاشت می‌شود

و قطب و صفرهای بی‌نهایت به $z=-1$ نگاشت می‌شود
و قطب و صفرهای صفر به $z=1$ نگاشت می‌شود

$$G(s)=\frac{a}{s+a} \longrightarrow G_D(z)=K\frac{a(z+1)}{z-e^{-aT}}$$

بهره فیلتر زمان گسسته را طوری تنظیم می‌کنیم که با بهره فیلتر زمان پیوسته تطبیق داشته باشد. برای فیلترهای پایین‌گذر، بهره فیلتر زمان گسسته در $z=1$ باید با بهره فیلتر زمان پیوسته در $s=0$ یکسان باشد. به طور مشابه برای فیلترهای بالاگذر بهره‌ها باید به ترتیب در $z=-1$ و $s=\infty$ با هم تطبیق داشته باشند.

$$G_D(1)=K\frac{a(1+1)}{1-e^{-aT}}=G(0)=\frac{a}{a} \rightarrow K=\frac{1-e^{-aT}}{2a}$$

مثال

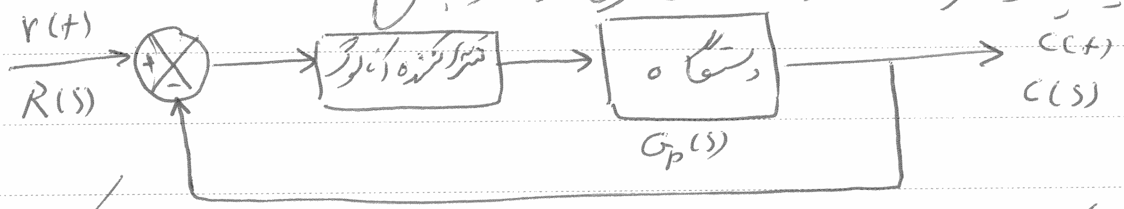
$$G(s) = \frac{1}{(s+a)^2+b^2} = \frac{1}{(s+a+jb)(s+a-jb)}$$

$$G_D(z) = K\frac{(z+1)^2}{z^2-2ze^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}$$

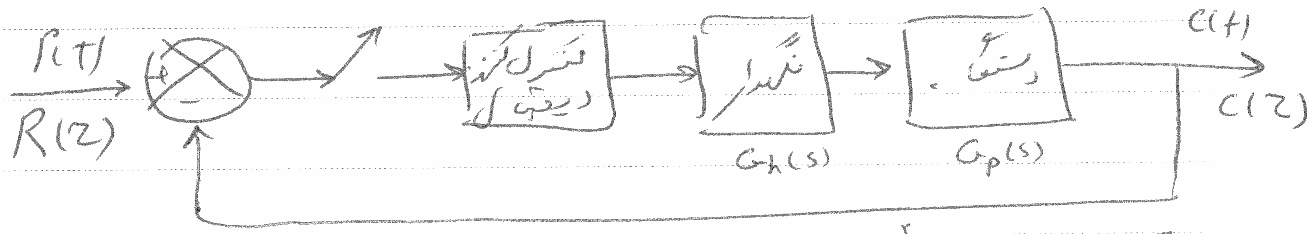
$$G_D(1) = G(0) \to K = \frac{1-2e^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}{4(a^2+b^2)}$$

۳-۴) اصول طراحی بر اساس معادل زمان‌ـگسسته یک کنترل کننده آنالوگ

هدف جایگزین یک کنترل کننده آنالوگ با یک کنترل کننده دیجیتال



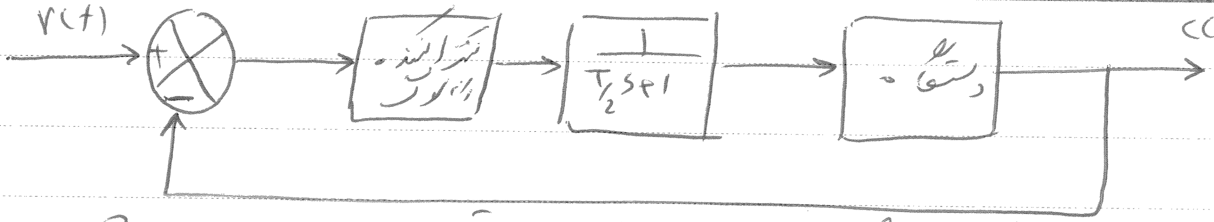
در دیجیتال کردن نیاز به اضافه کردن مدار نگهدار است که این مدار یک تأخیر زمانی به فاز ایجاد می‌کند



$$G_h(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}, \quad e^{-Ts} = \frac{1-\frac{Ts}{2}+\frac{(Ts)^2}{8}-\dots}{1+\frac{Ts}{2}+\frac{(Ts)^2}{8}} \approx \frac{1-\frac{Ts}{2}}{1+\frac{Ts}{2}}$$

$$\frac{1-e^{-Ts}}{s} = \frac{1}{s}\left(1-\frac{1-\frac{Ts}{2}}{1+\frac{Ts}{2}}\right) = \frac{T}{\frac{T}{2}s+1} \to$$

با حذف T: $G_h(s) = \frac{1}{\frac{T}{2}s+1}$



در این روش ابتدا کنترل کننده آنالوگ طراحی می‌شود و سپس به دیجیتال تبدیل می‌شود.
کنترل کننده ای با مشخصات زیر را می‌خواهیم

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+2)} \qquad \underline{\zeta = 0.5} \qquad t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 2 \rightarrow \omega_n = 4$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 4\sqrt{1-0.25} = 3.464 \rightarrow \frac{2\pi}{\omega_d} = 1.814\ s$$

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} = 16.3\,\% \rightarrow$$

$$T = 0.2\ s$$

با توجه به $\frac{2\pi}{\omega_d}$ فرکانس نمونه برداری باید ۱۰ برابر آن باشد

$$G_h(s) = \frac{1}{\frac{T}{2}s+1} = \frac{1}{0.1s+1} = \frac{10}{s+10}$$

با روش‌های طراحی کنترل کننده آنالوگ داریم

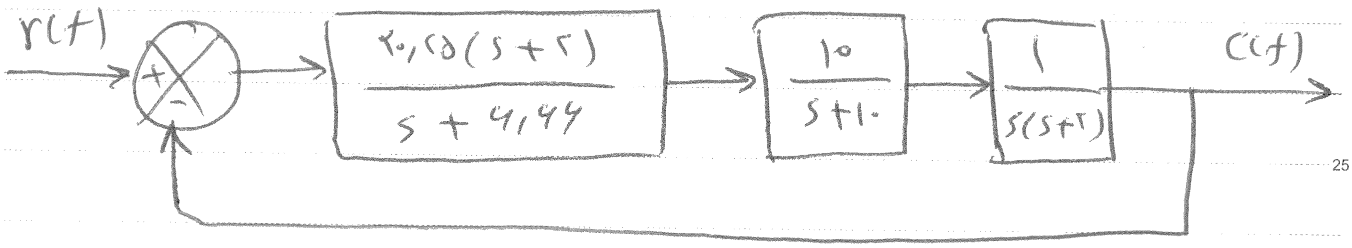
$$G_c(s) = 20.25\left(\frac{s+2}{s+4.44}\right)$$

حلقه؟

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{202.5}{(s+4.44)(s+10)s}}{1+\dfrac{202.5}{(s+4.44)(s+10)s}} = \frac{202.5}{(s+2+j2\sqrt{3})(s+2-j2\sqrt{3})(s+12.44)}$$

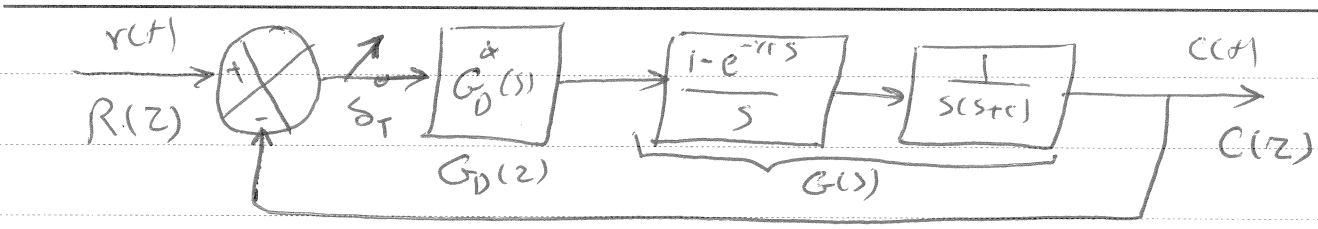
$$\rightarrow \zeta = 0.5 \rightarrow \omega_n = 4$$

قطب سوم خیلی دور است و نقشی ندارد چون قطب غیر غالب باشد



$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$
$$\zeta = 0.5 \qquad \omega_n = 4$$

۷۵



حال از روی $G_c(s)$ می‌خواهیم $G_D(z)$ را بسازیم

[illegible]

$$G_c(s) = ۲۰٫۲۵\,\frac{s+۲}{s+۶٫۶۶}$$

$s = -۲ \rightarrow z = e^{sT} = e^{-۲\times۰٫۲} = ۰٫۶۷۰۳$

$s = -۶٫۶۶ \rightarrow z = e^{-۶٫۶۶\times۰٫۲} = e^{-۱٫۳۳} = ۰٫۲۶۴۴$

$$G_D(z) = K\,\frac{z-۰٫۶۷۰۳}{z-۰٫۲۶۴۴} \qquad G_D(1) = G_c(0)$$

$$\rightarrow K\times\frac{1-۰٫۶۷۰۳}{1-۰٫۲۶۴۴} = ۲۰٫۲۵\,\frac{0+۲}{0+۶٫۶۶} \rightarrow K = ۱۳٫۵۷$$

$$\boxed{G_D(z) = ۱۳٫۵۷\,\frac{z-۰٫۶۷۰۳}{z-۰٫۲۶۴۴}}$$

$(z=1)$ $\frac{۱٫۶۷}{۱٫۴۴}\times K = ۲۰٫۲۵$

$K = \frac{۲۰٫۲۵\times۱٫۴۴}{۱٫۶۷} = ۱۵٫۶۸$

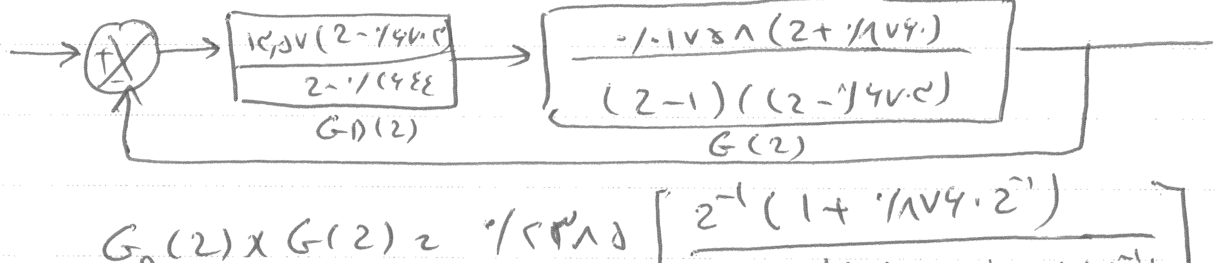
[illegible]

$$G(z) = \mathcal{Z}[G(s)] = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-0.2s}}{s}\,\frac{1}{s(s+2)}\right]$$

$$= (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+2)}\right] = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left[\frac{0.5}{s^2} - \frac{0.25}{s} + \frac{0.25}{s+2}\right]$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right)\left[\frac{0.1z}{(z-1)^2} - \frac{0.25z}{z-1} + \frac{0.25z}{z-e^{-0.4}}\right]$$

$$= \frac{0.01758\,(z+0.8760)}{(z-1)(z-0.6703)}$$



$$G_D(z)\times G(z) = 0.2385\left[\frac{z^{-1}(1+0.8760z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.2644z^{-1})}\right]$$

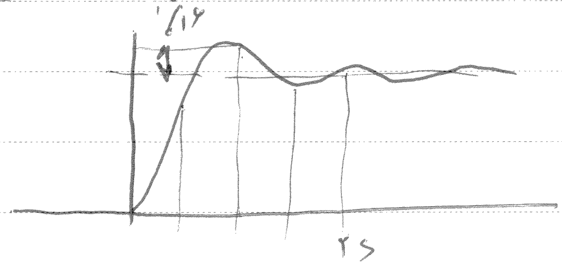
صالح

$$R(z) \rightarrow \bigotimes \rightarrow \boxed{\dfrac{0.2385(1+0.8760z^{-1})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.2644z^{-1})}} \rightarrow C(z)$$

تابع حلقه بسته:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.2385z^{-1}+0.2089z^{-2}}{1-1.0259z^{-1}+0.4733z^{-2}}$$

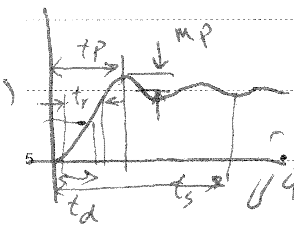
$$\boxed{y(k) = 1.0259\,y(k-1) - 0.4733\,y(k-2) + 0.2385\,x(k-1) + 0.2089\,x(k-2)}$$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

۴-۴ تحلیلهای پاسخ گذرا و حالت دائمی

ناشی از قطبهای سیستم   ناشی از ورودی



مشخصه‌های پاسخ گذرا:

۱- زمان تأخیر t_d Delay time زمان لازم برای رسیدن به نصف مقدار نهایی

۲- زمان صعود t_r Rise time زمان از ۱۰٪ تا ۹۰٪

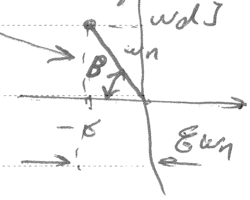
۳- زمان فرا t_p Peak time زمان رسیدن به اولین peak

۴- فراجهش حداکثر M_p Maximum overshoot نسبت مقدار اضافه به مقدار نهایی

۵- زمان استقرار t_s settling time زمان لازم برای رسیدن به ۹۸٪ مقدار نهایی   چهار برابر ثابت زمانی

مشخصه‌های گذرای سیستم مرتبه دوم

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$t_r = \frac{1}{\omega_d}\tan^{-1}\frac{\omega_d}{-\sigma} = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

$$M_p = \exp\left(-\frac{\sigma\pi}{\omega_d}\right) = \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$ چهار برابر ثابت زمانی

ضریب ζ باید طوری باشد که نه فراجهش زیاد داشته و نه خیلی کند باشد $0.4 < \zeta < 0.8$

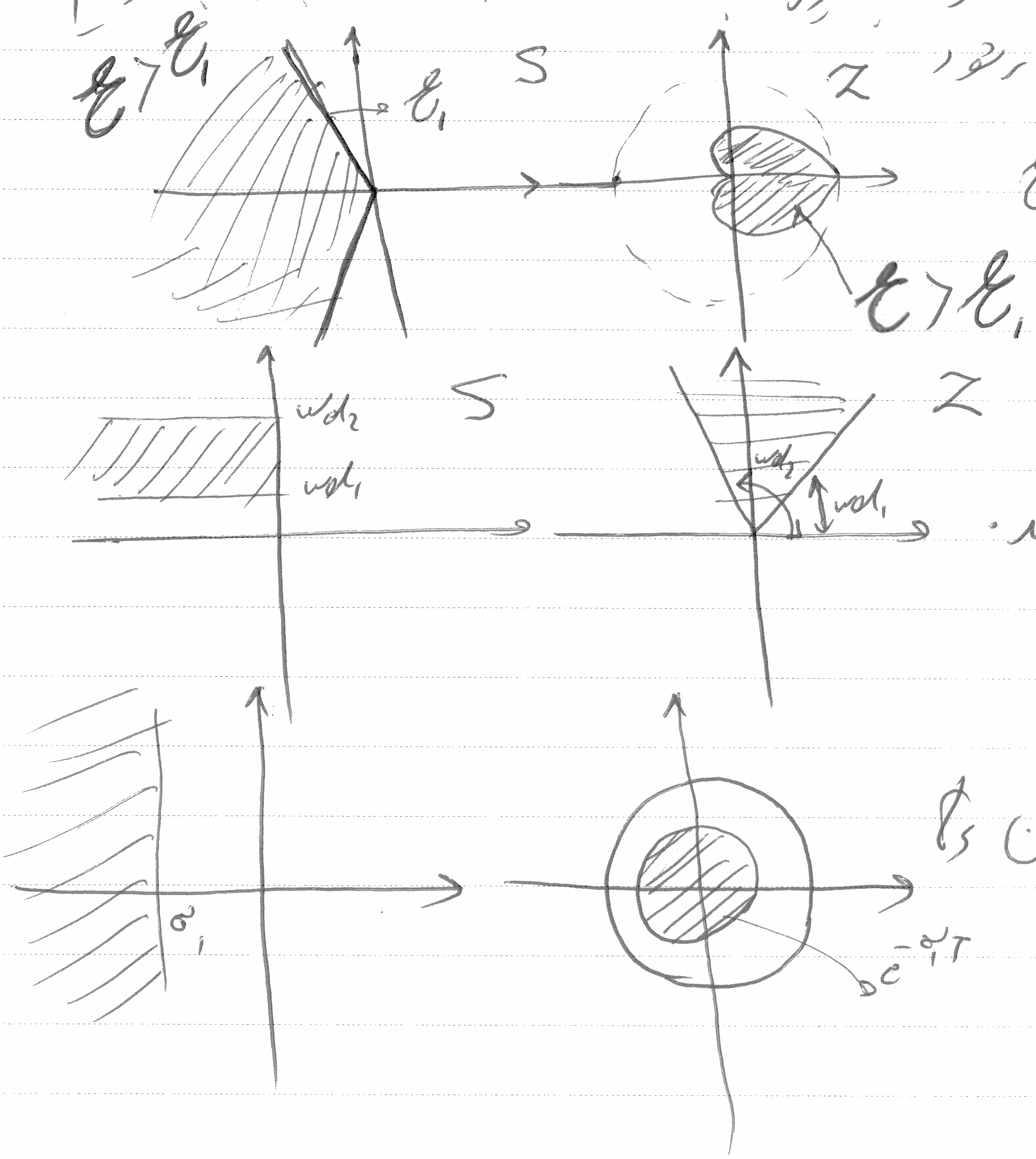
Subject:
Year. Month. Date. ( )

نگاشت از صفحه s به صفحه Z

قبلاً نگاشت خطوط نسبت میرایی ثابت، ω_d ثابت و σ ثابت را بحث کردیم

مجدداً اشاره می‌شود

نسبت میرایی ξ



رشد طبیعی میرا باشد.

زمان مستقر شدن σ

Subject:

Year. Month. Date. ( )

ارتباط بین محل قطبها و صفرهای صفحه Z و پاسخ گذرا

در زمان گسسته لازم است تا شرط نایکوئیست برآورده شود یعنی $\omega_s > 2\omega_1$

اما اگر این شرط برآورده نشود، قطبها تکرار می‌گردند $s_2 = \sigma_1 \pm j(\omega_1 \pm n\omega_s)$ $\quad n=1,2,\ldots$

$n=1 \quad s_2 = \sigma_1 \pm j(\omega_1 - \omega_s)$

یعنی در صورت تداخل فرکانسی نوساناتی با فرکانس $\omega_s - \omega_1$ یا $k\omega_s - \omega_1$ خواهیم داشت

در صورت رعایت شرط نایکوئیست

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots a_n} = \frac{b_0 z^n + \cdots b_n}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}$$ فرض کنید

از روی رابطه فوق می‌توان $C(z)$ را به شکل زیر بیان نمود

$$\Rightarrow C(z) = a_0 + \sum \frac{a_n z}{z-p_n} + \sum_i \frac{\beta_i z e^{-a_i T} \sin \omega_i T}{z^2 - 2e^{-a_i T} z \cos \omega_i T + e^{-a_i T}}$$

$$+ \sum \frac{\gamma_j z (z - e^{-a_j T} \cos \omega_j T)}{z^2 - 2e^{-a_j T} z \cos \omega_j T + e^{-a_j T}} + \left[\frac{z}{(z-p)^2}, \frac{z(z+p)}{(z-p)^3} + \cdots \right]$$

قطبهای $C(z)$ توسط ضرایب $a_1, a_2, \ldots a_n$ و قطبهای ورودی $R(z)$ تعیین می‌شود.

جدولهای ۵-۳ تا ۵-۴ نمایش شکل موج خروجی به ازای محلهای مختلف قطبها را نشان می‌دهد

Subject :

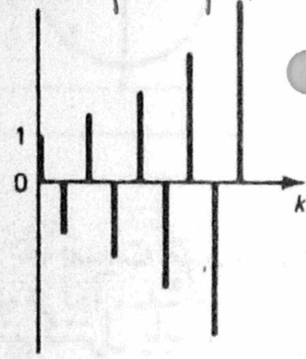
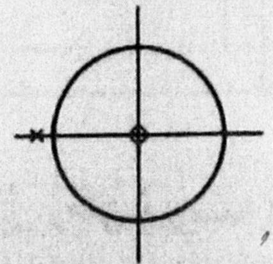
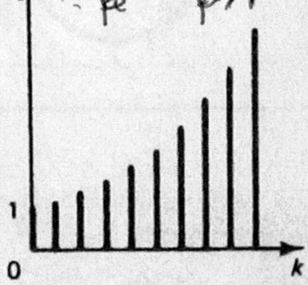
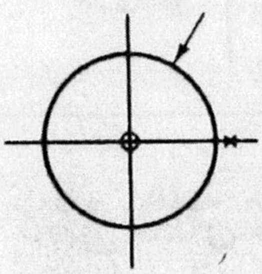
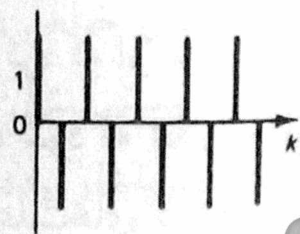
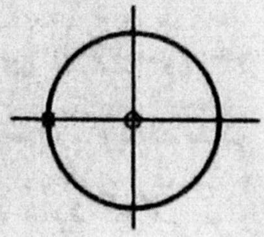
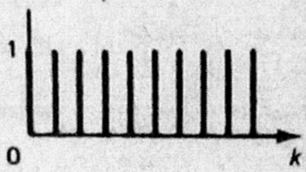
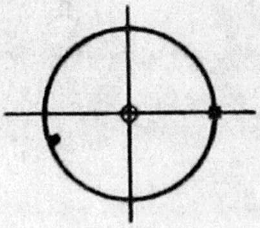
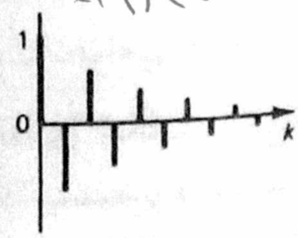
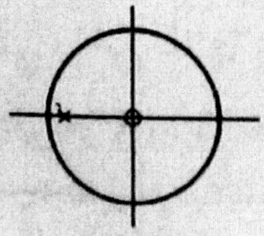
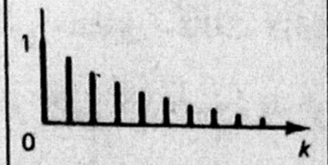
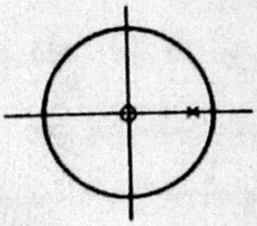
Year . Month . Date . ( )

جدول۴-۳ نمایشهای ترسیمی عکس تبدیل z $\quad z/(z-p)$

$$\frac{z}{z-p} = \mathcal{Z}[p^k]^{-1} \quad (p = \text{قطب ساده})$$

$[p^{k-1}]$

$\frac{z^{-1}}{1-pz^{-1}}$ z $\frac{z}{z-p}$

عکس تبدیل z	موقعیت قطب-صفر	عکس تبدیل z	موقعیت قطب-صفر
p^{k-1} $\quad p<-1$ 	 قطب [illegible]	$y(k) = p^{k-1}$ $\quad p>1$ 	دایره واحد  قطب [illegible]
		$p=1$ 	
$-1<p<0$ 		$0<p<1$ 	

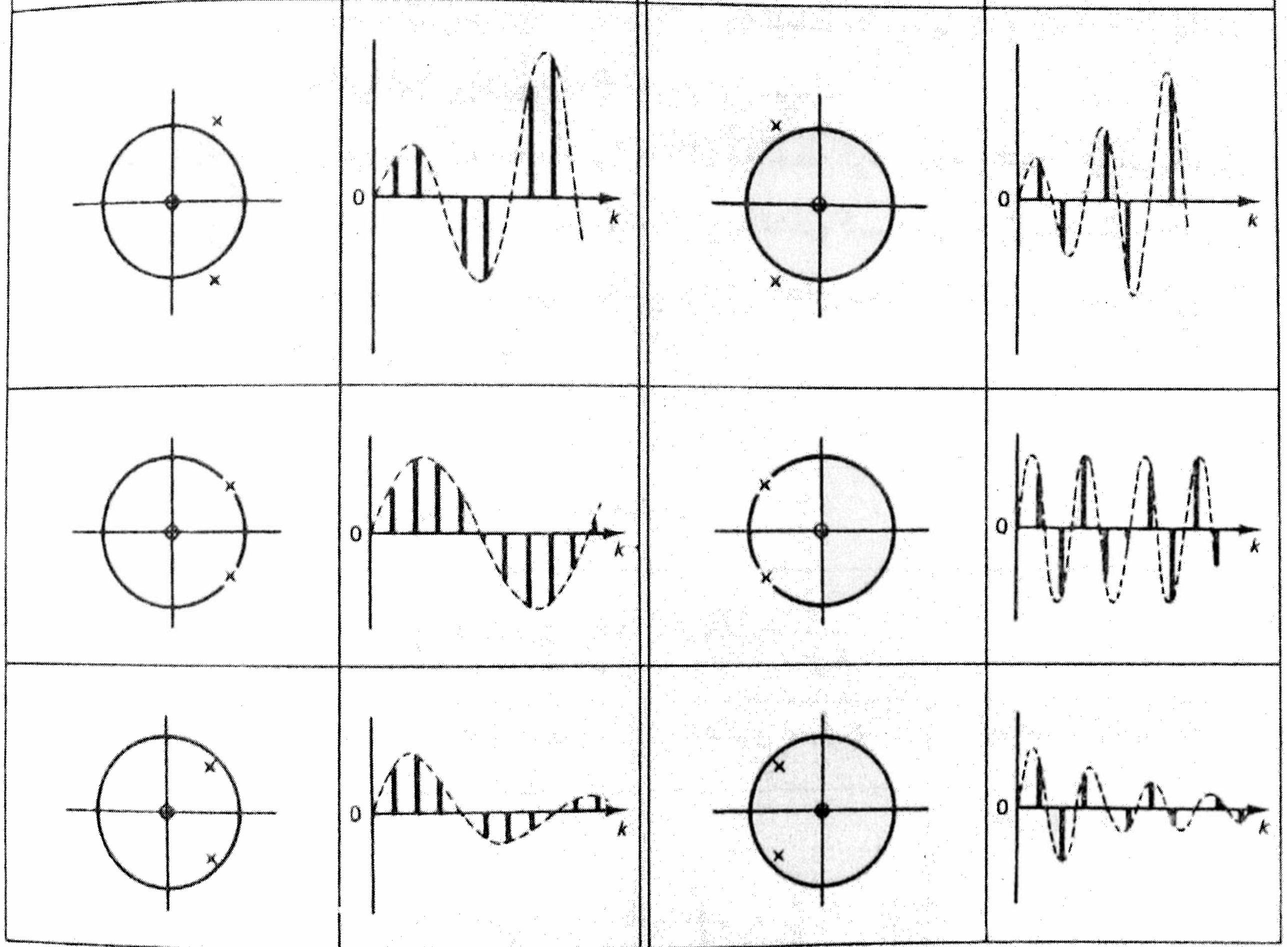
ص ۷۷

جدول ۴-۴ نمایشهای ترسیمی عکس تبدیل z

$ze^{-aT}\sin\omega T/[z^{2} - 2e^{-aT}z\cos\omega T + e^{-2aT}]$

$$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^{2} - 2e^{-aT}z\cos\omega T + e^{-2aT}} = \mathcal{Z}[e^{-akT}\sin\omega kT]$$

عکس تبدیل z	موقعیت قطب-صفر	عکس تبدیل z	موقعیت قطب-صفر



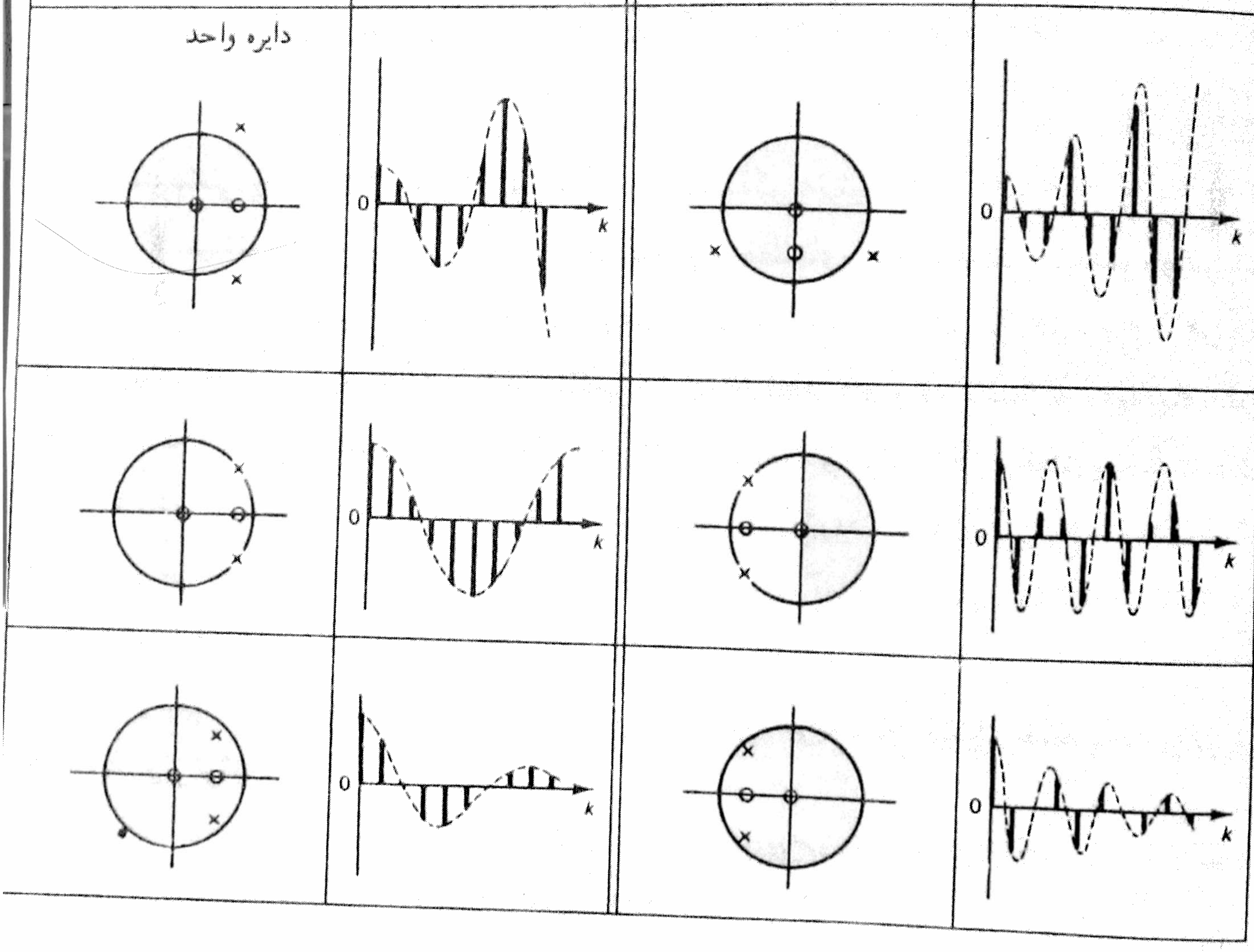
ص ۷۸

جدول ۴-۵ نمایشهای ترسیمی عکس تبدیل z

$z(z - e^{-aT}\cos\omega T)/[z^{۲} - ۲e^{-aT} z\cos\omega T + e^{-۲aT}]$

$$\frac{z(z - e^{-aT}\cos\omega T)}{z^{۲} - ۲e^{-aT} z\cos\omega T + e^{-۲aT}} = \mathcal{Z}[e^{-akT}\cos\omega kT]$$

عکس تبدیل z	موقعیت قطب-صفر	عکس تبدیل z	موقعیت قطب-صفر



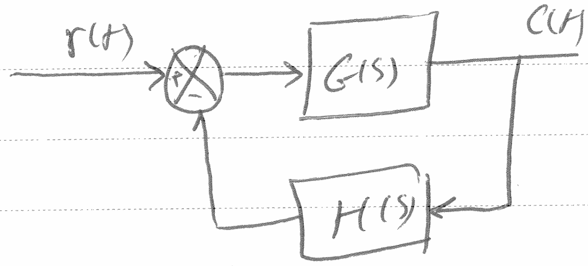
ص ۷۹

تحلیل خطای حالت دائمی (سیستمهای کنترل زمان پیوسته)

خطای دائمی ناشی از عدم توانایی سیستم برای تعقیب انواع ورودی‌ها

(خطای دائمی دیگری می‌تواند ناشی از اشکالات موجود در اجزای سیستم باشد)

فرض کنید تابع حلقه باز سیستم بصورت زیر باشد



$$G(s)H(s) = \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{s^N(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)}$$

$N=0$ نوع ۰	جمله s^N در مخرج نشان دهنده قطب مکرری از مرتبه N در مبدا است
$N=1$ نوع ۱	سیستم را برحسب تعداد انتگرالگیر در تابع حلقه باز دسته‌بندی می‌کنند
$N=2$ نوع ۲	

نوع ۰ نسبت به ورودی پله خطای محدود و ورودی شیب خطای بینهایت

نوع ۱ " " خطای صفر " " " محدود

نوع ۲ " " " " " صفر

با افزایش نوع دقت بالا می‌رود اما پایداری را به خطر می‌اندازد

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \rightarrow \frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)H(s)}{R(s)}$$

$$= \frac{1}{1+G(s)H(s)} \rightarrow E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0}\left[s \times \frac{1}{1+G(s)H(s)} \times R(s)\right] \overset{R(s)=1/s}{=} \frac{1}{1+G(0)H(0)}$$

Subject:
Year. Month. Date.

ثابت خطای وضعیت استاتیکی $= K_p = \lim_{s \to 0} G(s)H(s) = G(0)H(0)$

برای ورودی پله $e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$

ثابت خطای سرعت استاتیکی: $e_{ss} = \lim_{s \to 0} \left[\frac{s}{1+G(s)H(s)} \times \frac{1}{s^2} \right]$ ورودی شیب

$= \lim_{s \to 0} \frac{1}{sH(s)G(s)}$

$K_v = \lim_{s \to 0} sH(s)G(s)$

$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$ خطای حرکت حالت دائمی برای ورودی شیب

ثابت خطای شتاب استاتیکی $r(t) = \frac{1}{2} t^2 u(t)$ ورودی شتاب

$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \left[\frac{s}{1+G(s)H(s)} \times \frac{1}{s^3} \right] = \lim_{s \to 0} \left[\frac{1}{s^2 G(s)H(s)} \right]$

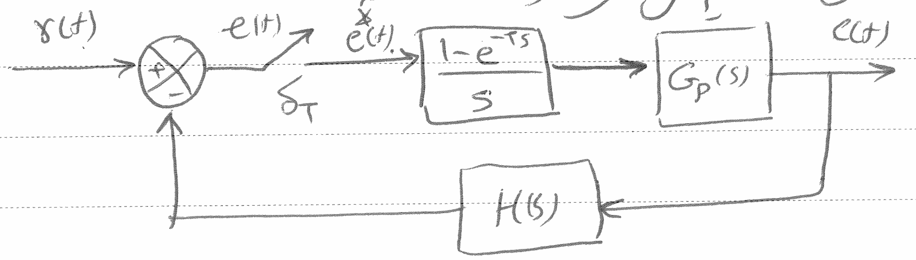
$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)H(s)$

$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$ خطای حرکت حالت دائمی برای ورودی شتاب

سیستم	خطای حالت دائمی ازای ورودی: ورودی پله $r(t)=1$	ورودی شیب $r(t)=t$	ورودی شتاب $r(t)=\frac{1}{2}t^2$
نوع ۰	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
نوع ۱	0	$1/K_v$	∞
نوع ۲	0	0	$\frac{1}{K_a}$

Subject :
Year . Month . Date . ( )

تحلیل خطای حالت دائمی در سیستمهای کنترل زمان گسسته



$e(t) = r(t) - b(t)$ $\qquad e^*_{ss} = \lim_{t\to\infty} e^*(t) = \lim_{k\to\infty} e(kT) = \lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})E(z)\right]$

$G(z) = (1-z^{-1})\, Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right] \qquad GH(z) = (1-z^{-1})\, Z\left[\frac{G_p(s)H(s)}{s}\right]$

$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+GH(z)} \rightarrow E(z) = R(z) - B(z)$

$= R(z) - GH(z)E(z)$

$E(z) = \frac{1}{1+GH(z)} R(z)$

$e^*_{ss} = \lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})\frac{1}{1+GH(z)} R(z)\right]$

$R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ ثابت خطای موقعیت استاتیکی

$e^*_{ss} = \lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})\frac{1}{1+GH(z)} \times \frac{1}{1-z^{-1}}\right] = \lim \frac{1}{1+GH(z)}$

$K_p = \lim_{z\to 1} GH(z) \rightarrow e^*_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$

خطای حالت دائمی به ورودی پله زمانی صفر است که $K_p = \infty$ باشد یعنی $GH(z)$ باید حداقل یک قطب در $z=1$ داشته باشد.

ثابت خطای سرعت استاتیکی

$r(t) = t1(t)$ ورودی شیب

$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \rightarrow e^*_{ss} = \lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})\frac{1}{(1+GH(z))} \times \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right]$

$= \lim_{z\to 1} \frac{T}{(1-z^{-1})GH(z)} \qquad K_v = \lim_{z\to 1} \frac{(1-z^{-1})GH(z)}{T}$

$e^*_{ss} = \frac{1}{K_v}$

ص ۱۳

Subject:

Year. Month. Date. ( )

ثابت خطای شتاب استاتیکی

$r(t) = \frac{1}{2} t^2 u(t)$

$$R(z) = \frac{T^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^3}$$

$$e_{ss}^* = \lim_{z \to 1} \left[(1-z^{-1}) \frac{1}{1+GH(z)} \times \frac{T^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^3} \right]$$

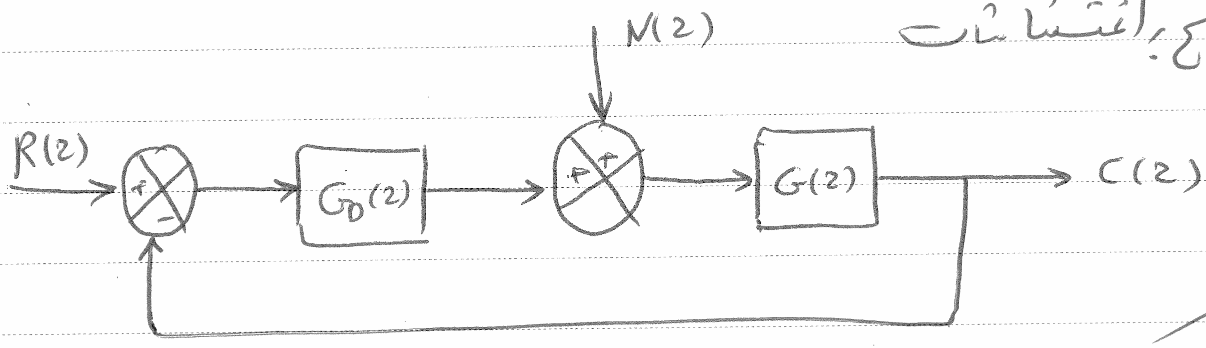
$$= \lim_{z \to 1} \frac{T^2}{(1-z^{-1})^2 GH(z)} \rightarrow K_a = \lim_{z \to 1} \frac{(1-z^{-1})^2 GH(z)}{T^2}$$

$$e_{ss}^* = \frac{1}{K_a}$$

افزایش تیپ: در حالت پیوسته انتگرال گیر به تابع تبدیل سیستم، در حالت گسسته باید به تعداد قطب در $z=1$ اضافه شود

تابع تبدیل حلقه باز: $= \frac{1}{(z-1)^N} \times \frac{A(z)}{B(z)}$

پاسخ به اغتشاشات



فرض کنید $R(z)=0$

$$\frac{C(z)}{N(z)} = \frac{G(z)}{1+G_D(z)G(z)}$$

اگر $G_D(z)G(z) \gg 1$ باشد

$$\frac{C(z)}{N(z)} \simeq \frac{1}{G_D(z)}$$

$, E(z) = R(z) - C(z) = -C(z)$

$$C(z) = \frac{N(z)}{G_D(z)} \longrightarrow E(z) = \frac{-N(z)}{G_D(z)}$$

اگر $G_D(z)$ قطبی در $z=1$ داشته باشد در این صورت خطای حالت دائمی ناشی از اغتشاش ثابت صفر است

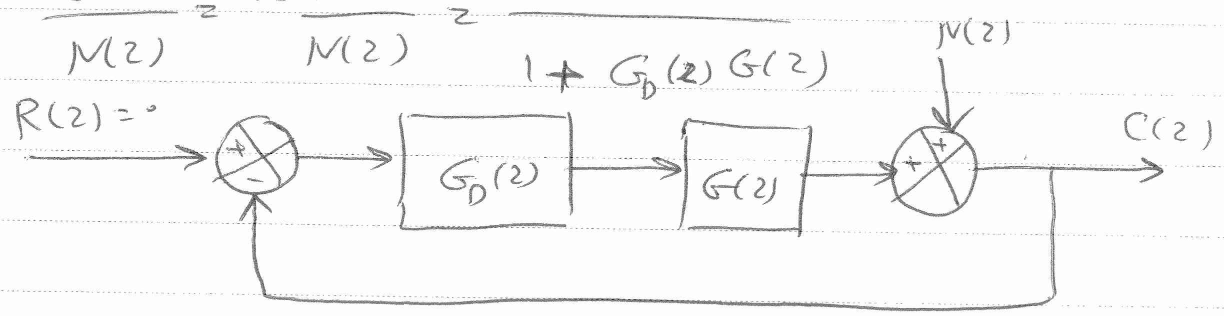
$$e_{ss} = \lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})E(z)\right] = \lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})\frac{-N(z)}{G_D(z)}\right]$$

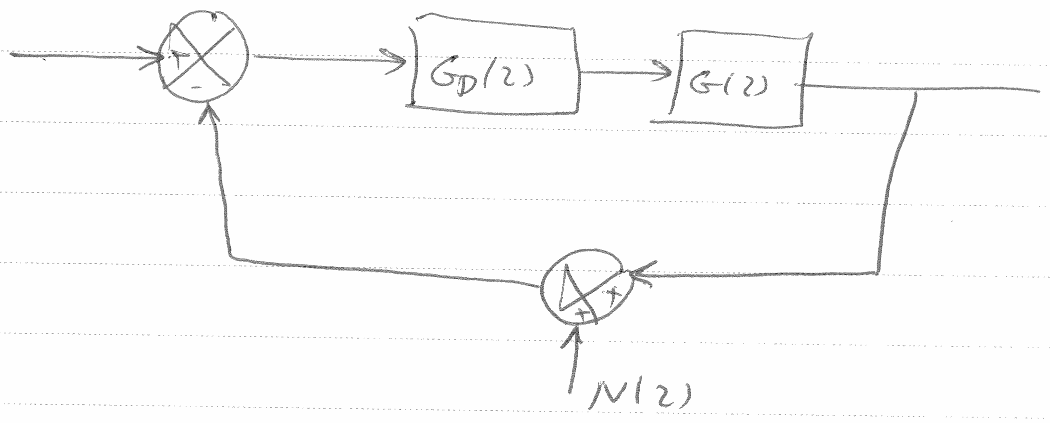
اگر نویز ثابت باشد $N(z) = \frac{N}{1-z^{-1}} \rightarrow e_{ss} = -\lim_{z\to 1}\left[\cancel{(1-z^{-1})} \times \frac{N}{\cancel{1-z^{-1}}} \times \frac{1}{G_D(z)}\right]$

$= -\lim \left(\frac{N}{G_D(z)}\right)$ اگر $G(z)$ شامل یک قطب در $z=1$ باشد $G_D(z) = \frac{\hat{G}_D(z)}{z-1} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\hat{G}_D(z)$

توجه کنید نقطه ای که اغتشاش در آن وارد سیستم می‌شود در تنظیم صورت ضریب $G_D(z)G(z)$ بسیار مهم است

$$\frac{C(z)}{N(z)} = -\frac{E(z)}{N(z)} = \frac{1}{1+G_D(z)G(z)}$$





$$\frac{C(z)}{N(z)} = -\frac{E(z)}{N(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1+G_D(z)G(z)}$$

(۵-۴

طراحی بر اساس روش مکان ریشه‌ها

Root Locus method

روش ترسیمی بسیار مفیدی است با این تفاوت که شرط پایداری تعیین کند

معادله تحلیل مکان ریشه

$$1+G(z)H(z)=0$$

یا

$$1+GH(z)=0$$

$$1+F(z)=0 \quad \begin{cases} F(z)=G(z)H(z) \\ \text{یا } F(z)=GH(z) \end{cases}$$

$$F(z)=-1 \rightarrow \begin{cases} \angle F(z)=\pm 180^\circ(2k+1) \\ |F(z)|=1 \end{cases}$$

مقادیری از z که هر دو شرط زاویه و اندازه را برآورده کنند، ریشه‌های معادله مشخصه یا قطب‌های حلقه بسته هستند.

قواعد کلی ساختن مکان ریشه

۱- صورت معادله مشخصه $1+F(z)$ را بدست آورده و به شکل زیر مرتب می‌کنیم

$$1+\frac{K(z+z_1)(z+z_2)\cdots(z+z_m)}{(z+p_1)(z+p_2)\cdots(z+p_n)} \qquad K>0$$

ضریب بهره

۲- نقاط شروع و نقاط پایانی مکان ریشه را بیابید

نقاط آغاز $K=0$ قطبهای حلقه باز و $K=\infty$ صفرهای حلقه باز

اگر تعداد قطب و صفر برابر نباشد $n-m$ مجانب خواهیم داشت

۳- مکان ریشه را روی محور حقیقی مشخص کنید که نقطه‌ای روی محور حقیقی در نظر بگیرید اگر تعداد کل قطبها و صفرهای حقیقی در سمت راست این نقطه فرد باشد روی مکان ریشه است در غیر اینصورت نیست

۴- مجانبهای مکان ریشه را تعیین کنید با توجه به برقراری شرط فاز

$$\text{زاویه مجانبها} = \frac{\pm 180(2N+1)}{n-m} \qquad N=0,1,2,\dots$$

$n =$ تعداد قطبهای پایدار $F(z)$

$m =$ تعداد صفرهای پایدار $F(z)$

محل مجانبها یکدیگر را روی محور حقیقی قطع می کنند.

$$-\sigma_a = -\frac{(P_1+P_2+\dots P_n)-(Z_1+Z_2+\dots Z_m)}{n-m}$$

۵- نقاط برشکست و درشکست

این نقاط معمولاً بر روی محور حقیقی هستند یا به صورت جفتهای مختلط مزدوج ظاهر می شوند

- اگر مکان ریشه ای بین دو قطب حلقه باز جا در روی محور حقیقی قرار گرفته باشد در این صورت بین این دو قطب لااقل یک نقطه برشکست وجود دارد

- اگر مکان ریشه ای بین دو صفر جا در (که یکی ممکن است در ∞ باشد) قرار گیرد لااقل یک نقطه درشکست میان این دو صفر خواهد بود

- اگر مکان ریشه ای بین یک قطب و یک صفر حلقه باز روی محور حقیقی قرار گیرد ممکن است هیچ نقطه درشکست و برشکست وجود نداشته باشد.

$$1 + F(z) = 0$$

$$1 + K\frac{B(z)}{A(z)} = 0 \qquad K = -\frac{A(z)}{B(z)}$$

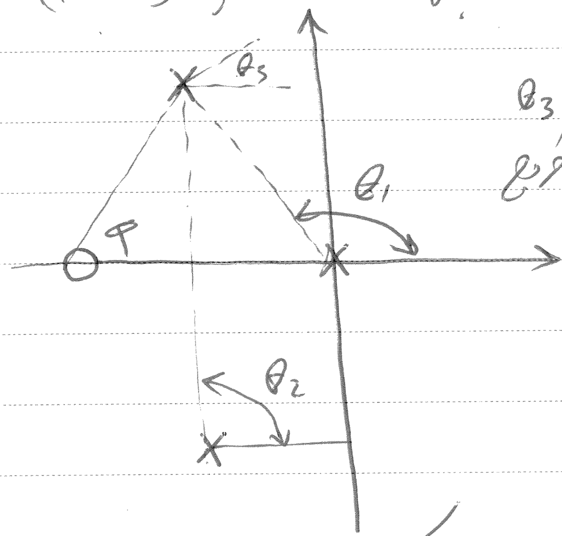
$$\frac{dK}{dz} = -\frac{A'(z)B(z) - A(z)B'(z)}{B^2(z)} = 0$$

مقدار K حتماً باید مثبت باشد.

Subject :

Year . Month . Date . ( )

۶- زاویه خروج (یا زاویه ورود) مکان ریشه از قطبهای مختلط (یا صفرهای مختلط) را تعیین کنید.



$\theta_3 = 180^\circ - (\theta_1 + \theta_2 \mp \varphi)$

زاویه خروج

۷- نقاطی را که در آن مکان ریشه محور انگاری را قطع می‌کند بیابید

متغیر $z = j\omega$ را در معادله $K = -\dfrac{A(z)}{B(z)}$ جایگزین نمایید و $z = j\omega$

ضریب موهومی آن را برابر صفر قرار داده مقدار ω و با جایگزینی مقدار K حاصل می‌شود

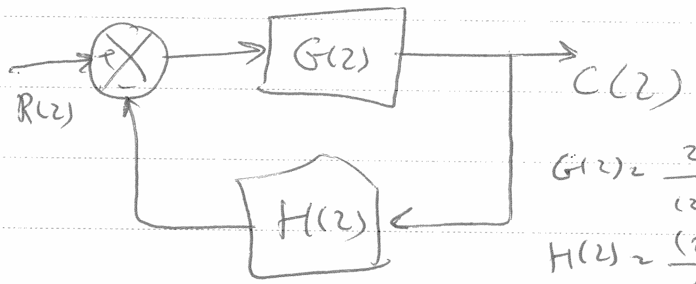
۸- هر نقطه روی مکان ریشه یک قطب حلقه‌بسته احتمالی است. یک نقطه خاص وقتی قطب حلقه‌بسته خواهد بود که مقدار ضریب بهره K شرط اندازه را برآورد.

$|F(z)| = 1$

$$\left| \frac{(z+z_1)(z+z_2)\cdots(z+z_n)}{(z+p_1)(z+p_2)\cdots(z+p_n)} \right| = \frac{1}{K}$$

Subject:
Year. Month. Date.

حذف شدن قطب‌های $G(z)$ با صفرهای $H(z)$: اگر سیستم حلقه بسته شکل زیر باشد و صفر $H(z)$ با قطب $G(z)$ مشترک باشد از تابع $H(z)G(z)$ حذف شده ولی در قطب سیستم حلقه بسته ظاهر می‌شود

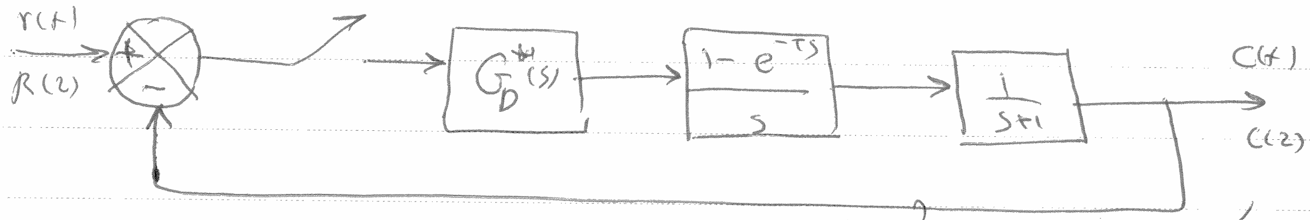


$$G(z) = \frac{z+c}{(z+a)(z+b)}$$

$$H(z) = \frac{(z+a)}{z+d}$$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)H(z)} = \frac{(z+c)(z+d)}{(z+a)\left[(z+b)(z+d)+z+c\right]}$$

دیاگرام‌های مکان ریشه سیستم کنترل دیجیتال



$$G_D(z) = \frac{K}{1-z^{-1}} = K\frac{z}{z-1}$$

فرض کنید کنترل کننده انتگرالگیر باشد

$$\mathcal{Z}\left[G_h(s)\,G_p(s)\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \times \frac{1}{s+1}\right]$$

$$= (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]$$

$$= (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right]$$

$$= \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}\right) = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

$$G(z) = G_D(z)\,\mathcal{Z}\left[G_h(z)\,G_p(z)\right] = \frac{Kz}{z-1} \times \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

$$1+G(z)=0 \qquad T=0.5 \qquad G(z) = \frac{K \times 0.3935\,z}{(z-1)(z-0.6065)}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

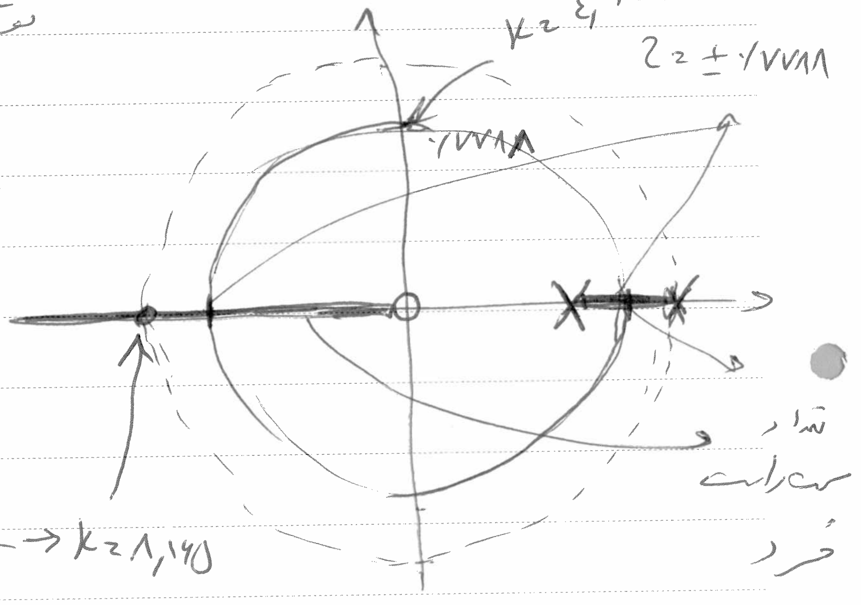
$$K = -\frac{(z-1)(z-0.6065)}{0.3935\,z} \rightarrow \frac{dK}{dz} = \frac{z^2-0.6065}{0.3935\,z^2} = 0$$

$z_1 = -0.7788 \;,\; z_2 = 0.7788 \rightarrow K_2 = 0.1244$ → نقطه شکست

$\rightarrow K_1 = 8.041$ → نقطه ورود

$$\left|\frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}\right| = \frac{1}{K}$$

$T = 0.5 \;,\; z = -1$

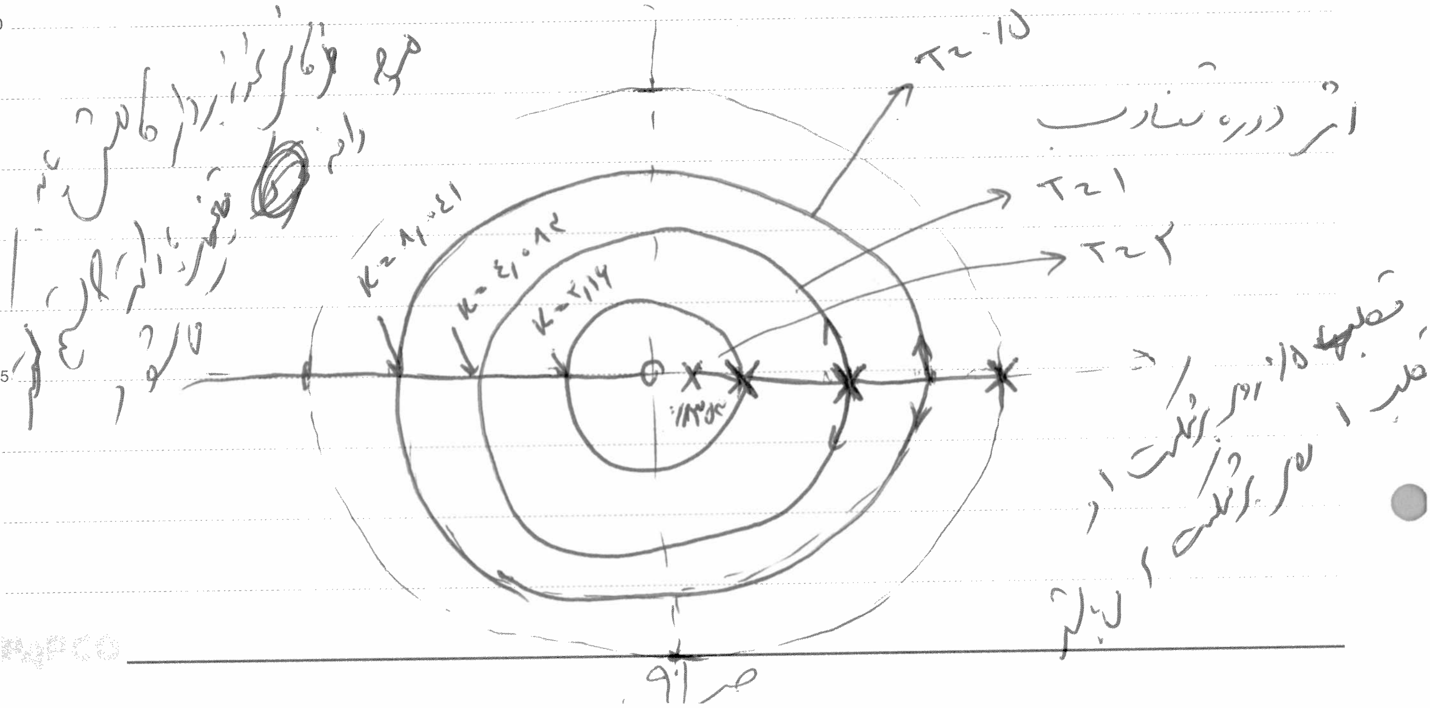


$$\left|\frac{0.3935(-1)}{(-2)(-1.6065)}\right| = \frac{1}{K} \rightarrow K = 8.165$$

محل تقاطع با محور موهومی $z = jv$ قرار داده و ضریب موهومی را برابر صفر قرار می‌دهیم

$$\frac{0.3935 \times jv}{(jv-1)(jv-\cancel{0}.6065)} = \frac{1}{K}$$

$v = \pm 0.7788 \rightarrow K = 4.041$



Subject:

Year. Month. Date. ( )

اثرات دوره تناوب نمونه برداری T بر مشخصه های پاسخ گذرا

افزایش دوره تناوب نمونه برداری T پایداری سیستم کنترل حلقه بسته را کمتر می‌کند.

کاهش دوره تناوب سبب میشود سیستم حلقه بسته به پیوسته رفتار نماید.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(۴-۴ طراحی بر اساس روش پاسخ فرکانسی

مفاهیم و نقش پاسخ فرکانسی مانند سیستم پیوسته است.

بحث بر روی دو مقدار دامنه و فاز بود، چرا که در صورت برآورده شدن شرایط فرکانسی حفظ می‌شود.

پاسخ سیستم زمان گسسته خطی تغییرناپذیر با زمان به ورودی سینوسی

پاسخ فرکانسی $G(z)$ را می‌توان با جایگزینی $z = e^{j\omega T}$ در $G(z)$ بدست آورد.

$$u(t) = \sin \omega t \rightarrow u(k) = u(kT) = \sin k\omega T$$

$$U(z) = \mathcal{Z}[\sin k\omega T] = \frac{z \sin \omega T}{(z-e^{j\omega T})(z-e^{-j\omega T})}$$

پاسخ سیستم $X(z)$ برابر خواهد بود

$$X(z) = G(z) \times U(z)$$

$$= G(z) \times \frac{z \sin \omega T}{(z-e^{j\omega T})(z-e^{-j\omega T})} = \frac{az}{z-e^{j\omega T}} + \frac{\bar{a} z}{z-e^{-j\omega T}} + [\text{جملات ناشی از قطب‌های } G(z)]$$

با ضرب دو طرف معادله در $\frac{z-e^{j\omega T}}{z}$ داریم

$$G(z) \times \frac{\sin \omega T}{z-e^{-j\omega T}} = a + \frac{\bar{a}(z-e^{j\omega T})}{z-e^{-j\omega T}} + \frac{z-e^{j\omega T}}{z}[\text{جملات ناشی از قطب‌های } G(z)]$$

با میل دادن $z \rightarrow e^{j\omega T}$ جملات دوم و سوم به سمت صفر میل می‌کنند

$$G(e^{j\omega T}) \times \frac{\sin \omega T}{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}} = a \rightarrow a = G(e^{j\omega T}) \times \frac{1}{2j}$$

به همین ترتیب با ضرب مشابه دو طرف $\bar{a}$ محاسبه می‌شود

$$\bar{a} = G(e^{-j\omega T}) \times \frac{-1}{2j}$$

اگر فرض کنیم

$$G(e^{j\omega T}) = Me^{j\theta}$$

$$\rightarrow G(e^{-j\omega T}) = Me^{-j\theta}$$

$$X(z) = \frac{Me^{j\theta}}{2j} \times \frac{z}{z-e^{j\omega T}} - \frac{Me^{-j\theta}}{2j} \times \frac{z}{z-e^{-j\omega T}} + \left[\text{جملات ناشی از قطبهای } G(z)\right]$$

$$= \frac{M}{2j}\left(\frac{e^{j\theta} z}{z-e^{j\omega T}} - \frac{e^{-j\theta}}{z-e^{-j\omega T}}\right) + \left[\text{جملات ناشی از قطبهای } G(z)\right]$$

$$\rightarrow x(kT) = \underbrace{\frac{M}{2j}\left(e^{jk\omega T} \times e^{j\theta} - e^{-jk\omega T} \times e^{-j\theta}\right)}_{\text{حالت پایدار}} + \underbrace{Z^{-1}\left[\text{جملات ناشی از قطبهای } G(z)\right]}_{\text{حالت گذرا}}$$

$$x_{ss}(kT) = \frac{M}{2j}\left[e^{j(k\omega T+\theta)} - e^{-j(k\omega T+\theta)}\right] = M\sin(k\omega T + \theta)$$

$$M = M(\omega) = |G(e^{j\omega T})|$$

$$\theta = \theta(\omega) = \angle G(e^{j\omega T})$$

$$x_{ss}(kT) = |G(e^{j\omega T})| \times \sin(k\omega T + \angle G(e^{j\omega T}))$$

$G(e^{j\omega T})$ را تابع تبدیل پالس سینوسی می گویند

مثال: سیستم با معادله زیر را در نظر بگیرید

$$x(kT) = u(kT) + a x((k-1)T)$$

که در آن $u(kT)$ ورودی و $x(kT)$ خروجی است $u(kT) = A\sin k\omega T$

خروجی حالت دائمی $x(kT)$ را بدست آورید

$$X(z) = U(z) + a z^{-1} X(z) \qquad G(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$G(e^{j\omega T}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega T}} = \frac{1}{1-a\cos\omega T + ja\sin\omega T}$$

$$|G(e^{j\omega T})| = M = \frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega T}} \qquad \angle G(e^{j\omega T}) = -\tan^{-1}\frac{a\sin\omega T}{1-a\cos\omega T}$$

$$x_{ss}(kT) = AM\sin(k\omega T+\theta)$$

$$= \frac{A}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega T}} \times \sin\left(k\omega T - \tan^{-1}\frac{a\sin\omega T}{1-a\cos\omega T}\right)$$

تبدیل دو خطی صفحه w

با توجه به اینکه $z = e^{j\omega T}$ پاسخ فرکانسی در صفحه z گویایی مناسبی ندارد.

پس دیگر آن را از صفحه z به صفحه w می‌بریم

$$z = \frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}$$

$$w = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

$s \leftarrow (0, j\frac{\omega_s}{2}) \longrightarrow z(-1, 0, 1)$

$w \longleftarrow w(0, \infty)$

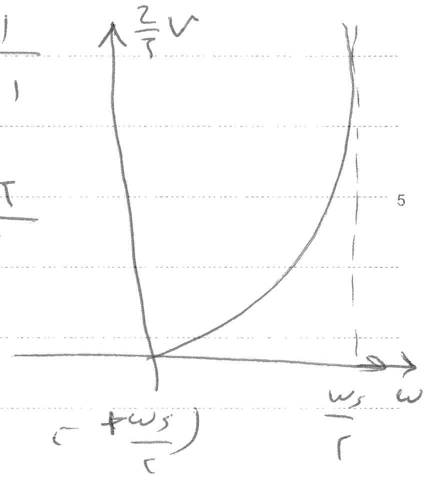
امتداد آن $\left(-j\frac{\omega_s}{2} \leftarrow s \rightarrow j\frac{\omega_s}{2}\right) \Leftarrow (-\infty \leftarrow w \rightarrow +\infty)$

Subject:
Year. Month. Date.

دگرچه صفحه w از لحاظ هندسی شبیه صفحه s است اما محور فرکانس اعوجاج پیدا کرده است

$$w\Big|_{w=jv} = jv = \frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1}\Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{2}{T}\,\frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1}$$

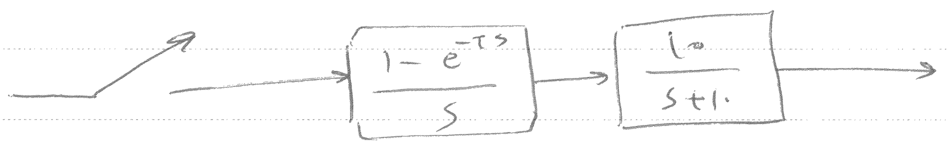
$$= \frac{2}{T}\,\frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{-j\frac{\omega T}{2}}} = \frac{2}{T}\,j\,\tan\frac{\omega T}{2}$$



$$(-\infty, +\infty) \rightarrow v = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2} \qquad \left(-\frac{\omega_s}{2}, +\frac{\omega_s}{2}\right)$$

اگر ωT خیلی کوچک باشد $\omega \simeq v$

مثال



$T = 0.1 \rightarrow G(w) = ?$

$$G(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \times \frac{10}{s+10}\right] = \frac{0.6321}{z-0.3679}$$

$$z = \frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w} = \frac{1-0.05w}{1+0.05w} \rightarrow G(w) = 9.241\,\frac{1-0.05w}{w+9.241}$$

$$|G(j\omega)|_{\omega\to\infty} = 0$$

$$|G(jv)|_{v\to\infty} = ?$$

$$\left|G\left(j\frac{\omega_s}{2}\right)\right|$$

قطب‌های $G(w)$ و $G(s)$ تا حدی شبیه هم هستند

صفرها از آنها اگر $T \to 0$ شبیه یکدیگر می‌شوند

Subject :

Year . Month . Date . ( )

مزایای روش دیاگرام بودی در طراحی

۱- مجانب فرکانس پایین منحنی اندازه در دیاگرام بودی نشان دهنده یکی از شاخص‌های خطای استاتیکی است یعنی K_p ، K_v ، K_a است

۲- مشخصه‌های پاسخ گذرا را می‌توان به صورت مشخصه‌های فرکانسی بر حسب حد فاز، حد بهره، پهنای باند و... تبدیل کرد

۳- طراحی یک جبران کننده دیجیتال (کنترل دیجیتال) به منظور برآورده کردن مشخصات داده شده را می‌توان با یک روش ساده و سرراست در دیاگرام بودی انجام داد.

phase lag phase lead

جبران سازی پیش‌افت فاز، پس‌افت فاز، پس‌افت - پیش‌افت فاز

پیش‌افت فاز: بهبود حد پایداری، سبب افزایش پهنای باند، افزایش سرعت سیستم در پاسخ زمانی.

عیب: در مورد مسائل نویزی فرکانس بالا ناشی از ضریب بهره افزایش یافته

پس‌افت فاز: کاهش ضریب بهره در فرکانس‌های بالا، کاهش پهنای باند سیستم، کاهش سرعت پاسخ زمانی، امکان افزایش ضریب بهره فرکانس پایین، کاهش خطای ماندگار

PD پیش‌افت فاز

PI پس‌افت فاز

در کنترل کننده پس‌فاز چون قطب و صفر به هم نزدیک هستند دقت ضرایب کنترل کننده مهم می‌شود.

روش طراحی در صفحه w

۱- نخست، $G(z)$، تبدیل z دستگاهی را که یک نگهدار قبل از آن قرار دارد، بدست آورید سپس با تبدیل دوخطی $G(w)$ را بدست آورید

$$z = \frac{1+(T/2)w}{1-(T/2)w}$$

$$G(w) = G(z)\Big|_{z=\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}}$$

۲- $w=j\nu$ را در $G(w)$ جایگزین کنید و دیاگرام بودی $G(j\nu)$ را رسم کنید

توجه کنید $\boxed{\nu_b = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_b T}{2}}$

۳- از دیاگرام بودی ثابت‌های خطای استاتیکی، حاشیه فاز و حد بهره را بخوانید

۴- با فرض اینکه بهره فرکانس پایین تابع تبدیل $G_D(w)$ کنترل کننده (ضریب ثابت) برابر واحد است بهره سیستم را با برآوردن شرایط ثابت خطای استاتیکی داده شده تعیین کنید. سپس با بکار بردن روش‌های طراحی معمول قطب‌ها و صفرها را تعیین کنید.

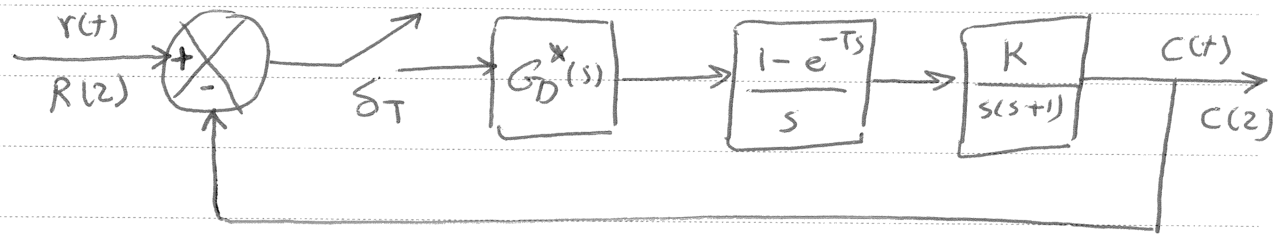
۵- از طریق تبدیل دوخطی $w = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$ $G(w)$ را به $G(z)$ تبدیل کنید

$$G_D(z) = G(w)\Big|_{w=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

۶- تابع تبدیل پالس $G_D(z)$ را با یک الگوریتم محاسباتی تحقق دهید.

مثال ۴-۱۲

سیستم کنترل دیجیتال نشان داده شده در شکل ~~[illegible]~~ را در نظر بگیرید. یک کنترل کننده دیجیتال در صفحه w طراحی کنید، بطوری که حد فاز مساوی ۵۰° حداقل حد بهره برابر 10db (که باعث میرایی ζ قطبهای حلقه بسته غالب در حدود ۰/۵ خواهد شد) و ثابت خطای سرعت استاتیکی K_v برابر با ۲ باشد $T = 0.2$



$$G(z) = Z\left[\frac{1-e^{-0.2s}}{s} \times \frac{K}{s(s+1)}\right] = 0.01873 \times \left[\frac{K(z+0.9356)}{(z-1)(z-0.8187)}\right]$$

$$z = \frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w} = \frac{1+0.1w}{1-0.1w} \rightarrow G(w) = \frac{K\left(\frac{w}{300.6}+1\right)\left(1-\frac{w}{10}\right)}{w\left(\frac{w}{0.997}+1\right)}$$

$$G_D(w) = \frac{1+\frac{w}{\alpha}}{1+\frac{w}{\beta}} \rightarrow G_D(w)G(w) = \frac{\left(1+\frac{w}{\alpha}\right)K\left(\frac{w}{300.6}+1\right)\left(1-\frac{w}{10}\right)}{\left(1+\frac{w}{\beta}\right) \times w\left(\frac{w}{0.997}+1\right)}$$

$$K_v = \lim_{w \to 0} w\, G_D(w)G(w) = 2 \rightarrow \boxed{K = 2}$$

با رسم دیاگرام بود حد فاز ۳۰° و حد بهره 15.5db است

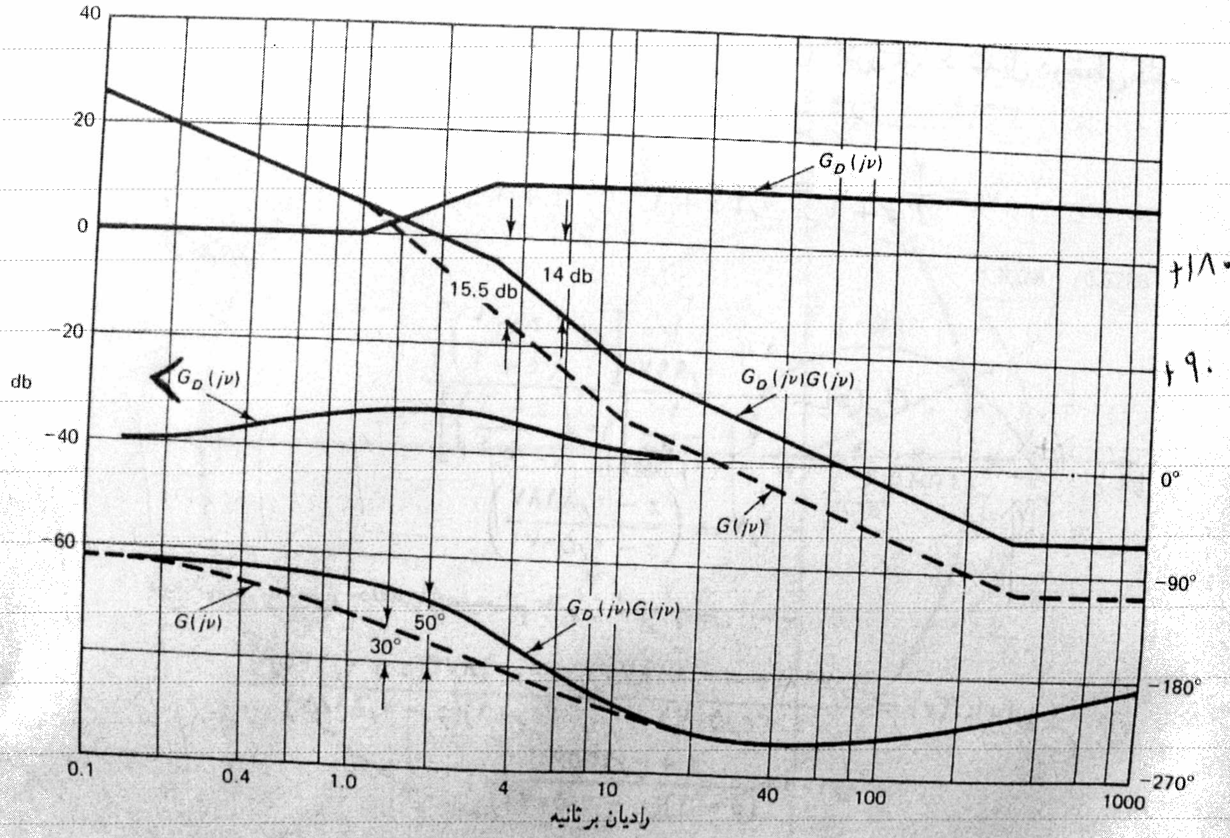
با بهبود حد فاز به ۵۰° تغییر داده شود ۲۰° لازم است تا صفر در ۰/۹۹۷ قرار گیرد

که در این صورت حد فاز ۱۸ درجه خواهد بود که باید ۳۲° اضافه شود برای این منظور

قطب در ۳/۲۷ قرار داده شود

$$G_D(w) = \frac{1+\frac{w}{0.997}}{1+\frac{w}{3.27}}$$

(۴-۶۴)



تابع تبدیل کنترل کننده داده شده با معادله (۴-۶۴) اکنون توسط تبدیل دوخطی داده شده با معادله (۴-۶۲) باردیگر به صفحه z تبدیل خواهد شد:

$$w = \frac{۲}{T}\frac{z-۱}{z+۱} = \frac{۲}{۰٫۲}\frac{z-۱}{z+۱} = ۱۰\frac{z-۱}{z+۱}$$

از این‌رو

$$G_D(z) = \frac{۱+\dfrac{۱}{۰٫۹۹۷}\left[۱۰\left(\dfrac{z-۱}{z+۱}\right)\right]}{۱+\dfrac{۱}{۳٫۲۷}\left[۱۰\left(\dfrac{z-۱}{z+۱}\right)\right]}$$

$$= ۲٫۷۱۸\left(\frac{z-۰٫۸۱۸۷}{z-۰٫۵۰۷۱}\right)$$

تابع تبدیل پالسی حلقه‌باز سیستم جبران شده چنین است

$$G_D(z)G(z) = \frac{۲٫۷۱۸(z-۰٫۸۱۸۷)}{z-۰٫۵۰۷۱}\,\frac{۲\times ۰٫۰۱۸۷۳(z+۰٫۹۳۵۶)}{(z-۱)(z-۰٫۸۱۸۷)}$$

$$= ۰٫۱۰۱۸\frac{z+۰٫۹۳۵۶}{(z-۱)(z-۰٫۵۰۷۱)}$$

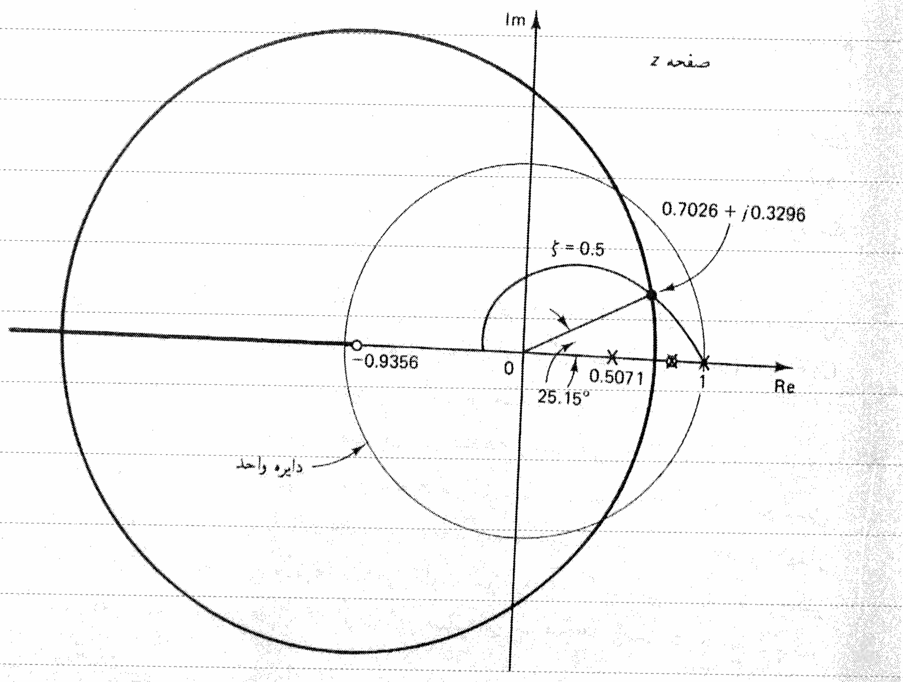
تابع تبدیل پالسی حلقه‌بسته سیستم طراحی شده چنین است

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{۰٫۱۰۱۸(z+۰٫۹۳۵۶)}{(z-۱)(z-۰٫۵۰۷۱)+۰٫۱۰۱۸(z+۰٫۹۳۵۶)}$$

$$= \frac{۰٫۱۰۱۸(z+۰٫۹۳۵۶)}{(z-۰٫۷۰۲۶+j۰٫۳۲۹۶)(z-۰٫۷۰۲۶-j۰٫۳۲۹۶)}$$

از این معادله اخیر می‌بینیم که قطبهای حلقه‌بسته در محلهای زیر قرار دارند

$$z = ۰٫۷۰۲۶ \pm j۰٫۳۲۹۶$$



شکل ۴-۵۰ منحنی مکان ریشه برای سیستم طراحی شده در مثال ۴-۱۳.

نکات مهم درباره طراحی در صفحه w

۱- اندازه و زاویه فاز $G(j\nu)$ برابر اندازه و زاویه فاز $G(z)$ است که در آن z بر روی دایره واحد از $z=1$ تا $z=-1$ تغییر می‌کند چون $z=e^{j\omega T}$ مقدار ω از ۰ تا $\omega_s/2$ را تغییر می‌کند بنابراین با توجه به رابطه $\nu = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$ ، ν از ۰ تا ∞ تغییر می‌کند در نتیجه پاسخ فرکانسی متناظر خواهد بود.

۲- معیار پایداری نایکوئیست و مفهوم حد فاز و حد بهره را می‌توان بر $G(j\nu)$ اعمال کرد.

۳- توابع $G(w)$ و $G(s)$ را مقایسه کنید به علت حضور ضریب مقیاس $2/T$ در تبدیل w ثابت‌های خطای استاتیکی متناظر برای $G(w)$ و $G(s)$ یکسان می‌شوند.

۴- تبدیل w یک یا تعداد بیشتری صفر در نیم صفحه راست در $G(w)$ به وجود می‌آورد و همین دلیل یک تابع غیر مینیمم فاز است. محل این صفر در فرکانس‌های گوشه بزرگتر واقع است با کوچک شدن دوره نمونه‌برداری اثر این صفر کم‌تر می‌شود

Subject:

Year. Month. Date. ( )

روش طراحی تحلیلی

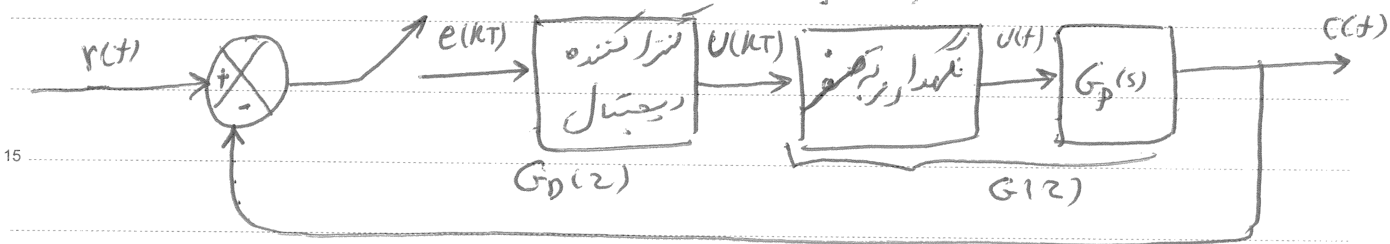
پیاده سازی کنترل کننده های آنالوگ دارای محدودیتهایی می باشد و نمی توان هر نوع کنترل کننده را پیاده سازی کرد

ادوات کنترل کننده های دیجیتال این محدودیتها را ندارند.

هدف مطلوب: پاسخ با کوتاهترین زمان استقرار، کمترین خطای ماندگار، کمترین نوسان

پاسخ با خصوصیات فوق را پاسخ مرده نوسان گویند Deadbeat response

طراحی کنترل کننده های دیجیتال برای کمترین زمان مستقر شدن با خطای حالت دائم صفر



$$G(z) = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}G_p(s)\right]$$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)\,G(z)}{1+G_D(z)\,G(z)} = F(z)$$

$$F(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots a_N z^{-N}$$ برای داشتن خطای صفر

$N \geq n$ و $F(z)$ نباید شامل توانهای مثبت z باشد

$$\rightarrow G_D(z) = \frac{F(z)}{G(z)\left[1-F(z)\right]}$$

شرایط تحقق پذیری $G_D(z)$

۱- درجه صورت $G_D(z)$ باید مساوی یا کوچکتر از درجه مخرج آن باشد

۲- اگر دستگاه $G_p(s)$ شامل عقب افتادگی انتقالی z^{-k} باشد در این صورت سیستم حلقه بسته طراحی شده حداقل باید به همان اندازه عقب افتادگی انتقالی داشته باشد.

۳- اگر $G(z)$ بصورت یک سری از z^{-1} گسترش داده شود جمله با کمترین توان در گسترش سری $F(z)$ برحسب z^{-1} لااقل باید به بزرگی جمله متناظر $G(z)$ باشد
(اگر $G(z)$ تاخیر دارد $F(z)$ هم حتماً تاخیر دارد)

شرایط پایداری

از حذف قطب ناپایدار با یک صفر کنترل کننده اجتناب شود.
از حذف صفر سیستم با قطبهای ناپایدار کنترل کننده اجتناب شود.

۱) از آنجا که کنترل کننده دیجیتال $G_D(z)$ نباید قطبهای ناپایدار $G(z)$ را حذف کند تمام قطبهای ناپایدار یا مرزی $G(z)$ باید بعنوان صفرهای $1-F(z)$ ظاهر گردد.

۲) صفرهای بیرون دایره واحد یا روی دایره واحد نباید با قطبهای $G_D(z)$ حذف شوند از اینرو تمام صفرهای $G(z)$ که بیرون یا روی دایره واحد قرار گرفته‌اند، بعنوان صفرهای $F(z)$ خواهند بود.

$$E(z) = R(z) - C(z) = R(z) - R(z)F(z)$$ شیوه طراحی

$$= R(z)\left[1 - F(z)\right]$$

ورودی پله $R(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$ ورودی شیب $R(z) = \dfrac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$

ورودی شتاب $R(z) = \dfrac{T^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3} \Longrightarrow R(z) = \dfrac{P(z)}{(1-z^{-1})^{q+1}}$

نوع ورودی

$$E(z) = \frac{P(z)\left[1 - F(z)\right]}{(1-z^{-1})^{q+1}}$$

برای اینکه $E(z)$ به سمت صفر میل کند باید شامل تعداد محدودی جملات از z^{-1} باشد.

$$1 - F(z) = (1-z^{-1})^{q+1} \times N(z) \rightarrow G_D(z) = \frac{F(z)}{G(z)\underbrace{(1-z^{-1})^{q+1} N(z)}_{[1-F(z)]}}$$

$$\rightarrow E(z) = P(z) \times N(z)$$

برای تحقق پذیری و پایداری $G_D(z)$ شرط اینکه خروجی پس از رسیدن به پایداری مشتق شدنی
سطح موجی نشان ندهد.

$c(t \geq nT) =$ ثابت برای ورودی پله

$\dot{c}(t \geq nT) =$ ثابت شیب

$\ddot{c}(t \geq nT) =$ ثابت شتاب

مثال ۴-۱۴

سیستم کنترل دیجیتال شکل ص ۱۰۳ را در نظر بگیرید که در آن

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

یک کنترل کننده $G_D(z)$ طراحی کنید که سیستم حلقه بسته در مقابل یک ورودی پله واحد یک شکل مرده نوسان را نشان بدهد $T=1$

(۱) $$G(z) = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\,\frac{1}{s(s+1)}\right] = \frac{0.3679(1+0.7183z^{-1})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.3679z^{-1})}$$

(۲) $$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1+G_D(z)G(z)} = F(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$$

سیستم مرتبه دوم است

(۳) $$1-F(z) = (1-z^{-1})N(z)$$

چون $G(z)$ دارای یک قطب بحرانی در $z=1$ است شرایط پایداری ایجاب می‌کند که $1-F(z)$ باید صفری در $z=1$ داشته باشد. اما این تابع قبلاً دارای این صفر است

باشد. به ورودی پله $C(t \geq 2T) =$ ثابت

$$U(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b(z^{-2} + z^{-3} + \cdots)$$

$b =$ ثابت

به علت اینکه تابع تبدیل دستگاه $G_p(s)$ شامل یک انتگرال‌گیر است $b=0$

(۴) $$U(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$$

$$\frac{C(z)}{U(z)} = G(z) \to U(z) = F(z) \times \frac{R(z)}{G(z)}$$

$$U(z) = F(z) \times \frac{1 - 0.12479 z^{-1}}{0.12479(1+0.7181 z^{-1}) z^{-1}}$$ ۵

برای اینکه $U(z)$: صورت کسر بزرگی از z^{-1} تنها با دو جمله باشد $F(z)$ باید به شکل زیر باشد

$$F(z) = (1+0.7181 z^{-1}) z^{-1} F_1$$ ۴

که در آن F_1 یک ثابت است

۲,۳ $\rightarrow 1 - a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = (1 - z^{-1}) N(z)$

$$N(z) = \frac{1 - a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = 1 + (1-a_1) z^{-1} + \frac{(1-a_1-a_2) z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

باقیمانده بر $1 - z^{-1}$ باید صفر باشد پس

$1 - a_1 - a_2 = 0$

$$F(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = (1 + 0.7181 z^{-1}) z^{-1} F_1$$

$\rightarrow a_1 = F_1$
$$\begin{cases} a_2 = a_1 \times 0.7181 \\ 1 - a_1 - a_2 = 0 \end{cases}$$

$1 - a_1 = a_1 \times 0.7181 \rightarrow 1.7181 a_1 = 1 \rightarrow a_1 = \frac{1}{1.7181} = 0.5820$

$a_2 = 1 - 0.5820 = 0.418$ $\rightarrow \boxed{F(z) = 0.5820 z^{-1} + 0.418 z^{-2}}$

$$N(z) = 1 + 0.418 z^{-1}$$

$$G_D(z) = \frac{F(z)}{G(z)(1-z^{-1})N(z)} = \frac{(1+0.7181 z^{-1}) \times 0.5820}{\frac{0.12479(1+0.7181 z^{-1}) z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.12479 z^{-1})}(1-z^{-1})(1+0.418 z^{-1})}$$

Subject:
Year. Month. Date.

$$G_D(z) = \frac{1.5820 - 0.5820\, z^{-1}}{1 + 0.4180\, z^{-1}}$$

اگر $r(t) = u(t)$

$$C(z) = F(z) \times R(z)$$

$$= \left(0.5820\, z^{-1} + 0.4180\, z^{-2}\right) \times \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$= 0.5820\, z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \cdots$$

$\rightarrow c(0) = 0 \quad , c(1) = 0.5820 \quad c(2) = 1$

$c(k) = 1 \qquad k = 2, \ldots, \infty$

برای بقیه ورودی ها هم می توان بررسی کرد .