فصل چهارم

طراحی سیستم‌های کنترل دیجیتال گسسته با روش‌های تبدیل

چهار روش

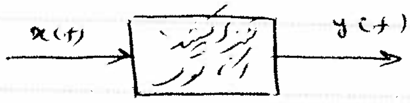
۱- روش غیر مستقیم ـ طراحی کنترل کننده پیوسته و تبدیل آن به گسسته

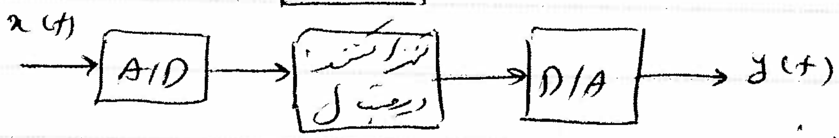
۲- روش معادل ریشه‌ای

۳- روش شکل ذوزنقه‌ای

۴- روش تحلیلی

بدست آوردن معادل‌های زمانی گسسته فیلترهای دیجیتال پیوسته

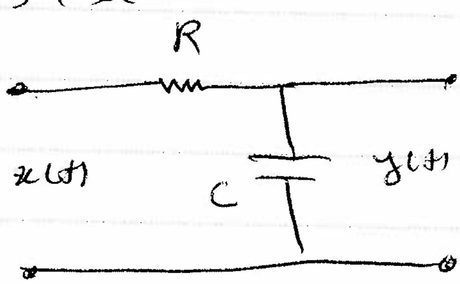




مشخصات پاسخ فرکانسی و زمانی کنترل کننده باید نزدیک به هم باشند.

گسسته کردن یک فیلتر دیجیتال پیوسته ساده:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{RCs+1} = \frac{a}{s+a}$$



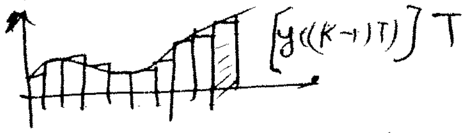
$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = ax(t)$$

$$\int_0^t \frac{dy(t)}{dt}\,dt = -a\int_0^t y(t)\,dt + a\int_0^t x(t)\,dt \rightarrow y(kT) - y((k-1)T) =$$

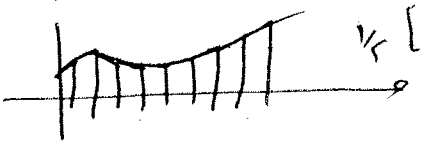
Subject:
Year. Month. Date. ( )

روشهای بدست آوردن معادل گسسته

۱- روش تفاضل معکوس



۲- روش تفاضل مستقیم



۳- روش تبدیل دوخطی

۴- روش تبدیل دوخطی با پیش‌تاب دادن فرکانس

۵- روش تغییر ناپذیری ضربه

۶- روش تغییر ناپذیری پله

۷- روش نگاشت قطب صفر تطبیق یافته

روش تفاضل معکوس:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a}{s+a}$$

$$\frac{dy}{dt} + ay = ax \rightarrow \frac{y(kT) - y((k-1)T)}{T} + a y(kT) = a x(kT)$$

$$y(kT) = y((k-1)T) - aT\left[y(kT) - x(kT)\right] \rightarrow Y(z) = z^{-1}Y(z) - aT\left[Y(z) - X(z)\right]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G_D(z) = \frac{aT}{1-z^{-1}+aT} = \frac{a}{\frac{1-z^{-1}}{T} + a} \rightarrow s = \frac{1-z^{-1}}{T}$$

شرط پایداری:

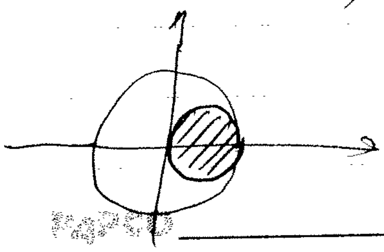
$$Re(s) < 0 \rightarrow Re\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right) < 0 \rightarrow Re\left(\frac{z-1}{Tz}\right) < 0$$

$$Re\left(\frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega}\right) < 0 \rightarrow Re\left(\frac{(\sigma + j\omega - 1)(\sigma - j\omega)}{(\sigma + j\omega)(\sigma - j\omega)}\right) < 0$$

$$Re\left(\frac{\sigma^2 - \sigma + \omega^2 + j\omega}{\sigma^2 + \omega^2}\right) < 0 \rightarrow \frac{\sigma^2 - \sigma + \omega^2}{\sigma^2 + \omega^2} < 0$$

$$(\sigma - 1/2)^2 + \omega^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

دایره به مرکز $1/2$ و $\omega = 0$ و شعاع مساوی $1/2$



Subject: $t \to (k-1)T$ $\qquad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y((k+1)T) - y(kT)}{T}$

Year. Month. Date.

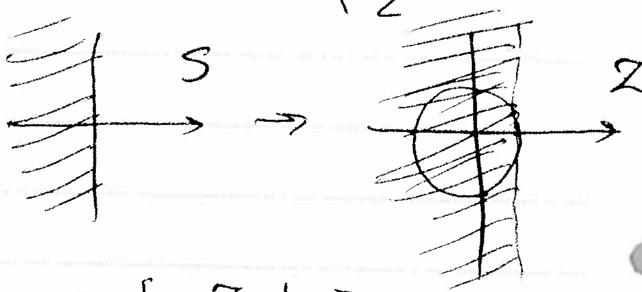
روش تفاضل مستقیم

$$\frac{dy(t)}{dt} + a y(t) = a x(t) \to \frac{y(kT) - y((k-1)T)}{T} + a\, y((k-1)T) = a\, x((k-1)T)$$

$$Y(z) = (1-aT) z^{-1} Y(z) + aT z^{-1} X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G_D(z) = \frac{aT z^{-1}}{1-(1-aT)z^{-1}} = \frac{a}{\dfrac{1-z^{-1}}{T z^{-1}} + a}$$

$$S = \frac{1-z^{-1}}{T z^{-1}}$$



$$Re\left[\frac{1-z^{-1}}{T z^{-1}}\right] < 0 \to Re\left[\frac{z-1}{T}\right] < 0$$

$$\to Re[z] < 1$$

ممکن است یک سیستم پایدار در صفحه s در صفحه z ناپایدار گردد

این روش نمی‌تواند بعنوان یک روش معمول مورد استفاده قرار گیرد.

روش تبدیل دوخطی

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[y(kT) + y((k-1)T)\right] T$$

$$y(kT) = y((k-1)T) - \frac{aT}{2}\left[y(kT) + y((k-1)T)\right] + \frac{aT}{2}\left[x(kT) + x((k-1)T)\right]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G_D(z) = \frac{\frac{aT}{2}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1}) + \frac{aT}{2}(1+z^{-1})} = \frac{a}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + a}$$

$$S = \frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \qquad G_D(z) = G(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$Re\left(\frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) < 0 \rightarrow Re\left(\frac{z-1}{z+1}\right) < 0$$

$$z = \sigma + j\omega \qquad Re\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = Re\left[\frac{(\sigma-1+j\omega)(\sigma+1-j\omega)}{(\sigma+1+j\omega)(\sigma+1-j\omega)}\right]$$

$$= Re\left[\frac{\sigma^2-1+\omega^2+2\omega j}{(\sigma+1)^2+\omega^2}\right] < 0 \rightarrow \sigma^2-1+\omega^2<0$$

$\rightarrow \sigma^2+\omega^2<1$ که این یک دایره واحد است

درنتیجه یک فیلتر حوزه s پایدار یک فیلتر حوزه z پایدار را خواهد بود

روش تبدیل دوخطی با پیش تاب دادن فرکانس

- برای بررسی اثر تغییرات فرکانسی $G(j\omega)$ و $G_D(e^{j\omega T})$ را مقایسه می‌کنیم

$$S = \frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \qquad s = j\omega_A \qquad z = e^{j\omega_D T}$$

$$j\omega_A = \frac{2}{T}\,\frac{1-e^{-j\omega_D T}}{1+e^{-j\omega_D T}} = \frac{2}{T}\,\frac{e^{j(\frac{1}{2})\omega_D T}-e^{-j(\frac{1}{2})\omega_D T}}{e^{j(\frac{1}{2})\omega_D T}+e^{-j(\frac{1}{2})\omega_D T}} \qquad ؟؟$$

$$= \frac{2}{T}\,\frac{2j\sin(\omega_D T/2)}{2\cos(\omega_D T/2)} = j\frac{2}{T}\tan\frac{\omega_D T}{2}$$

- پس در این تبدیل این تغییرات فرکانسی ایجاد شود

برای اصلاح این اثر باید در فرکانس این ضریب را اصلاح کرد. مثلاً فیلتر پایین گذر

$$G(s) = \frac{a}{s+a} \rightarrow G(j\omega) = \frac{a}{j\omega + a}$$

$$G(s') = \frac{\frac{2}{T}\tan\frac{aT}{2}}{s' + \frac{2}{T}\tan\frac{aT}{2}}$$

- حالا می‌توان تبدیل دوخطی را انجام داد.

مثال $G(s) = \frac{10}{s+10} \qquad T = 0.2$

$$G_D(z) = \left.\frac{\frac{2}{T}\tan\frac{10T}{2}}{s + \frac{2}{T}\tan\frac{10T}{2}}\right|_{s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{\frac{2}{T}\tan\frac{10T}{2}}{\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \frac{2}{T}\tan\frac{10T}{2}}$$

$T = 0.2$

$$= \frac{\tan\frac{2}{2}}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \tan\frac{2}{2}} = \frac{1.5574}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1.5574} = \frac{0.609(1+z^{-1})}{1+0.218z^{-1}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

روش تغییرناپذیری ضربه

$$G(s)=\frac{a}{s+a}$$

فیلتر زمان گسسته معادل $G_D(z)$ به دست آمده به روش تغییرناپذیری ضربه، فیلتری است که پاسخ ضربه آن $g_D(kT)=Z^{-1}[G_D(z)]$ در T برابر پاسخ ضربه پیوسته فیلتر $g(t)=L^{-1}[G(s)]$ باشد

$$g_D(kT)=T\,g(t)\Big|_{t=kT}$$

$$G_D(z)=Z[g_D(kT)]=T\,Z[g(t)]=T\,\cancel{Z}(\cancel{G}(s))$$

$$=T\,G(z)$$

$$G(s)=\frac{a}{s+a}$$

$$G_D(z)=T\,G(z)=\frac{Ta}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

به علت اینکه فیلتر زمان گسسته معادل $G_D(z)$ با تبدیل Z فیلتر آنالوگ $G(s)$ متناسب است، روش تغییرناپذیری ضربه را روش تبدیل Z نیز می‌گویند

اگر فرکانس نمونه‌برداری به اندازه کافی بزرگ باشد مشخصه پاسخ فرکانسی $G_D(z)$ شبیه به فیلتر زمان پیوسته خواهد بود.

Subject:

Year. Month. Date.

روش تغییرناپذیری پله

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G_D(z) \qquad \frac{y(s)}{u(s)} = G(s)$$

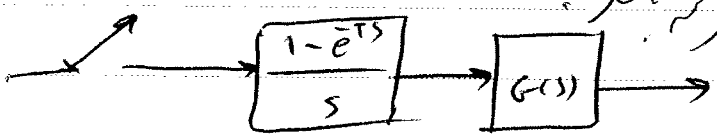
$$y(t) = \mathcal{Z}^{-1}\left[G_D(z) \times \frac{1}{1-z^{-1}}\right] = L^{-1}\left[G(s) \times \frac{1}{s}\right]_{t=kT}$$

$$\rightarrow G_D(z) \times \frac{1}{1-z^{-1}} = \mathcal{Z}\left\{L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]\right\}$$

$$G_D(z) = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$= \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\,G(s)\right]$$

مشاهده می‌شود که سمت راست معادله فیلتر $G(s)$ است که قبل از آن یک نگهدار مرتبه صفر و نگهدار ساختگی قرار گرفته باشد.



$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

$$G_D(z) = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left[\frac{a}{s(s+a)}\right]$$

$$= (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right] = (1-z^{-1})\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}\right)$$

$$= \frac{(1-e^{-aT})\,z^{-1}}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

روش نگاشت قطب - صفر تطبیق یافته

در این روش قطبها و صفرهای تابع تبدیل $G(s)$ به $G(z)$ نگاشته می‌شود

قطبها و صفرهای پایدار در $s=-b$ به $z=e^{-bT}$ نگاشت می‌شود

و قطب و صفرهای بینهایت به $z=-1$ نگاشت می‌شود

و قطب و صفرهای صفر به $z=1$ نگاشت می‌شود

$$G(s)=\frac{a}{s+a} \longrightarrow G_D(z)=K\frac{a(z+1)}{z-e^{-aT}}$$

بهره فیلتر زمان گسسته را چنان تنظیم می‌کنیم که با بهره فیلتر زمان پیوسته تطبیق داشته باشد. برای فیلترهای پایین گذر بهره فیلتر زمان گسسته در $z=1$ باید با بهره فیلتر زمان پیوسته در $s=0$ یکسان باشد. به طور مشابه برای فیلترهای بالاگذر بهره‌ها باید به ترتیب در $z=-1$ و $s=\infty$ با هم تطبیق داشته باشند.

$$G_D(1)=K\frac{a(1+1)}{1-e^{-aT}}=G(0)=\frac{a}{a} \rightarrow K=\frac{1-e^{-aT}}{2a}$$

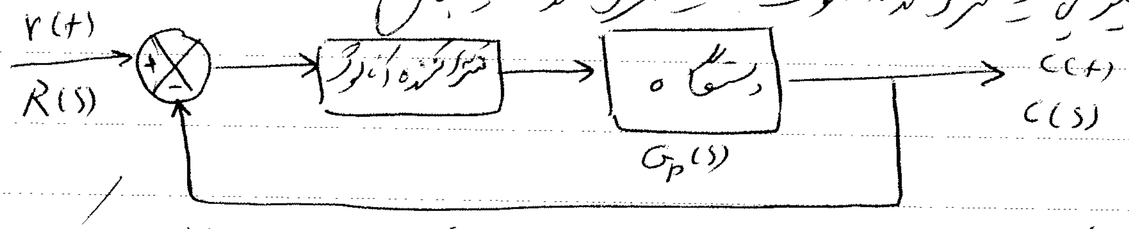
مثال $G(s)=\frac{1}{(s+a)^2+b^2}=\frac{1}{(s+a+jb)(s+a-jb)}$

$$G_D(z)=K\frac{(z+1)^2}{z^2-2ze^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}$$

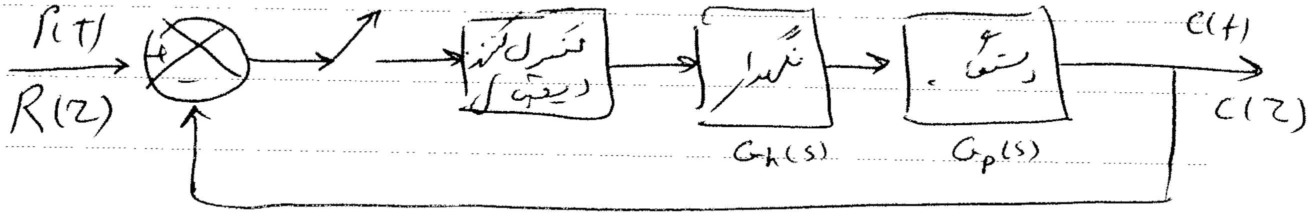
$$G_D(1)=G(0)\to K=\frac{1-2e^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}{4(a^2+b^2)}$$

۳-۴) اصول طراحی بر اساس معادل زمان-گسسته یک کنترل کننده آنالوگ

هدف جایگزین کردن یک کنترل کننده آنالوگ با یک کنترل کننده دیجیتال



در دیجیتال کردن نیاز به اضافه کردن مدار نگهدار است که این مدار یک تأخیر زمانی ایجاد می‌کند

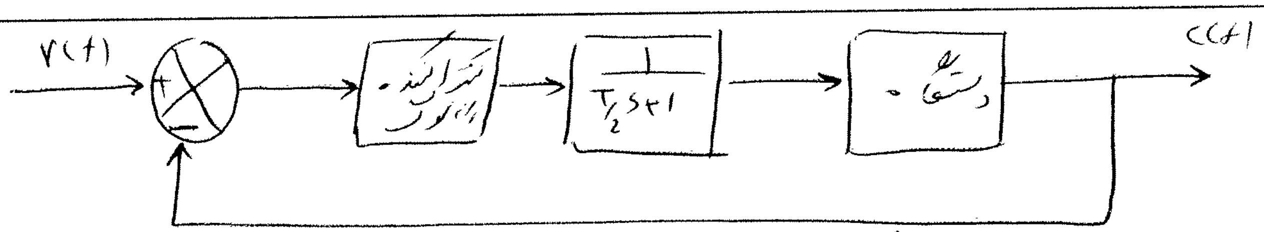


$$G_h(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s},\quad e^{-Ts}=\frac{1-\frac{Ts}{2}+\frac{(Ts)^2}{8}-\cdots}{1+\frac{Ts}{2}+\frac{(Ts)^2}{8}}\approx\frac{1-\frac{Ts}{2}}{1+\frac{Ts}{2}}$$

$$\frac{1-e^{-Ts}}{s}=\frac{1}{s}\left(1-\frac{1-\frac{Ts}{2}}{1+\frac{Ts}{2}}\right)=\frac{T}{\frac{T}{2}s+1}\to$$

با حذف T: $G_h(s)=\frac{1}{\frac{T}{2}s+1}$

Subject:
Year. Month. Date.



در این روش ابتدا کنترل کننده آنالوگ طراحی می شود و در جهت قبل به دیجیتال تبدیل می شود.
کنترل کننده ای با مشخصات زیر می خواهیم

$G_p(s) = \frac{1}{s(s+2)}$ $\quad \xi = 0.5 \quad t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} = 2 \to \omega_n = 4$

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = 4\sqrt{1-0.25} = 3.464 \to \frac{2\pi}{\omega_d} = 1.814\ s$

$M_p = e^{-\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\pi} = 16.3\% \to \frac{2\pi}{\omega_d}$

با توجه به $\frac{2\pi}{\omega_d}$ فرکانس نمونه برداری باید ۱۰ برابر آن باشد $\quad T = 0.2\ s$

$G_h(s) = \frac{1}{\frac{T}{2}s+1} = \frac{1}{0.1s+1} = \frac{10}{s+10}$

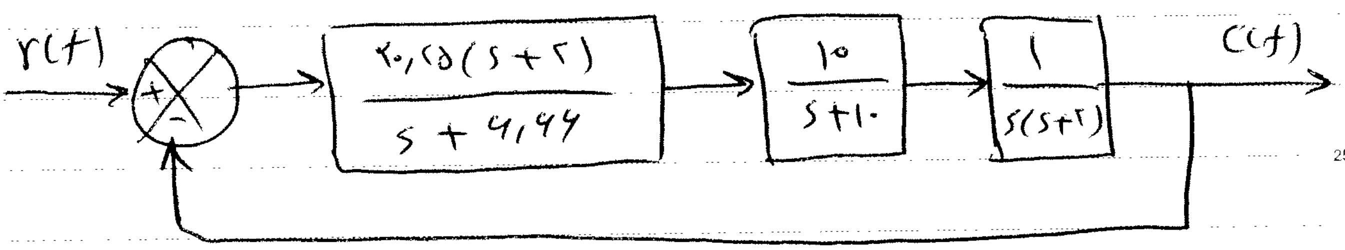
با روش های طراحی کنترل کننده آنالوگ داریم

$G_c(s) = 20.25\left(\frac{s+2}{s+4.44}\right)$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{202.5}{(s+4.44)(s+10)s}}{1+\frac{202.5}{(s+4.44)(s+10)s}} = \frac{202.5}{(s+2+j2\sqrt{3})(s+2-j2\sqrt{3})(s+12.44)}$$

قطب سوم خیلی دور است و نقشی ندارد فقط قطب های غالب باشند

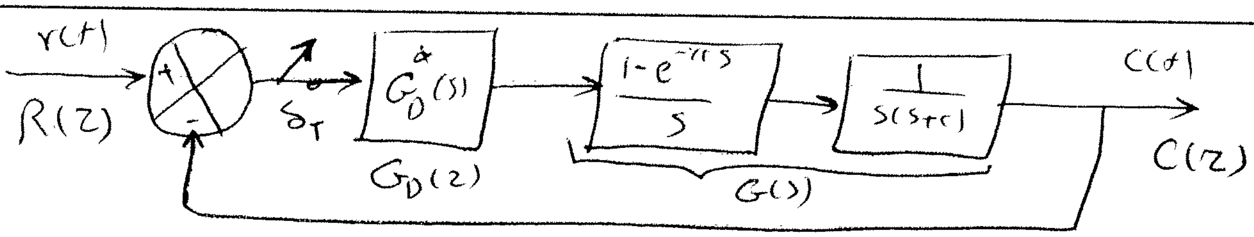
$\to \xi = 0.5 \to \omega_n = 4$



$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

$\xi = 0.5 \qquad \omega_n = 4$

Subject:
Year: Month: Date:



$G_D(z)$ را بدست آوریم $G_c(s)$ را میخواهیم

حال از روش
قطب و صفر تبدیل یافتیم

$$G_c(s) = 20.25\,\frac{s+2}{s+6.66}$$

$$s=-2 \rightarrow z = e^{+sT} = e^{-2\times 0.2} = 0.67032$$

$$s=-6.66 \rightarrow z = e^{-6.66\times 0.2} = e^{-1.332} = 0.26422$$

$$G_D(z) = K\,\frac{z-0.67032}{z-0.26422} \qquad G_D(1) = G_c(0)$$

$$\rightarrow K\times\frac{1-0.67032}{1-0.26422} = 20.25\,\frac{0+2}{0+6.66} \rightarrow K = 13.57$$

$$\boxed{G_D(z) = 13.57\,\frac{z-0.67032}{z-0.26422}}$$

$(z=1)$ $\frac{1.47}{1.14}\times K = 20.25$ $K = \frac{20.25\times 1.14}{1.47} = 15.68$

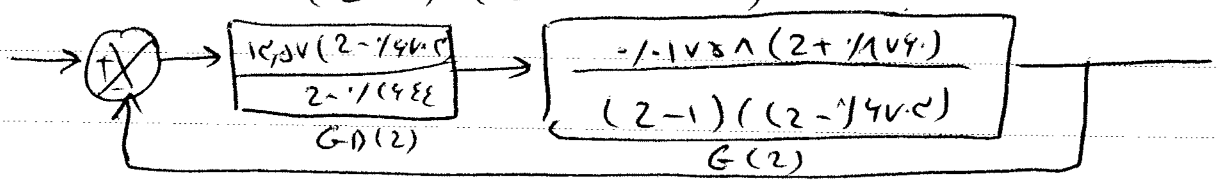
به منظور ارزیابی پاسخ سیستم کنترل دیجیتال اقدام میکنیم

$$G(z) = \mathcal{Z}[G(s)] = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-0.2s}}{s}\,\frac{1}{s(s+2)}\right]$$

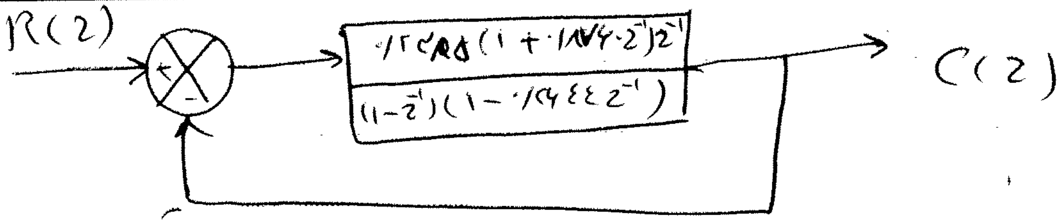
$$= (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+2)}\right] = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left[\frac{0.5}{s^2} - \frac{0.25}{s} + \frac{0.25}{s+2}\right]$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right)\left[\frac{0.1z}{(z-1)^2} - \frac{0.25z}{z-1} + \frac{0.25z}{z-e^{-0.4}}\right]$$

$$= \frac{0.01758\,(z+0.8760)}{(z-1)(z-0.67032)}$$



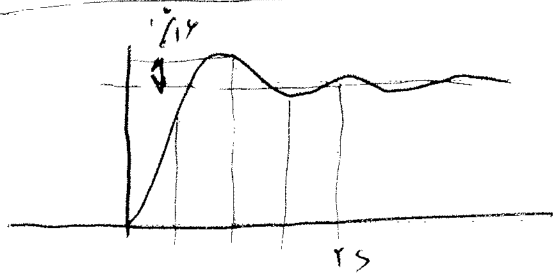
$$G_D(z)\times G(z) = 0.2385\left[\frac{z^{-1}(1+0.8760z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.26422z^{-1})}\right]$$



تابع حلقه بسته

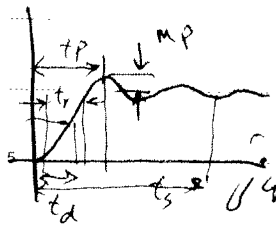
$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{۰/۳۲۵۸ z^{-1} + ۰/۲۱۸۹ z^{-2}}{1 - ۱/۰۲۵۹ z^{-1} + ۰/۴۷۲۲ z^{-2}}$$

$$\boxed{y(k) = ۱/۰۲۵۹ y(k-1) - ۰/۴۷۲۲ y(k-2) + ۰/۳۲۵۸ x(k-1) + ۰/۲۱۸۹ x(k-2)}$$



۴-۴ تحلیل‌های پاسخ گذرا و حالت دائمی

ناشی از قطبهای سیستم — ناشی از ورودی



مشخصه‌های پاسخ گذرا:

۱- زمان تأخیر t_d Delay time زمان لازم برای رسیدن به نصف مقدار نهایی

۲- زمان صعود t_r Rise time زمان از ۱۰٪ تا ۹۰٪

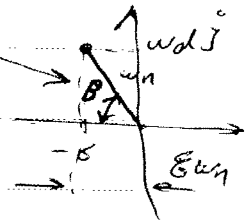
۳- زمان فرا t_p Peak time زمان رسیدن به اولین peak

۴- فراجهش حداکثر M_p Maximum overshoot نسبت مقدار اضافه به مقدار نهایی

۵- زمان استقرار t_s settling time زمان لازم برای رسیدن به ۹۸٪ مقدار نهایی — چهار برابر ثابت زمانی

مشخصه‌های گذرای سیستم مرتبه دوم

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$



$$t_r = \frac{1}{\omega_d}\tan^{-1}\frac{\omega_d}{-\sigma} = \frac{\pi-\beta}{\omega_d} \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$M_p = \exp\left(-\frac{\sigma\pi}{\omega_d}\right) = \exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

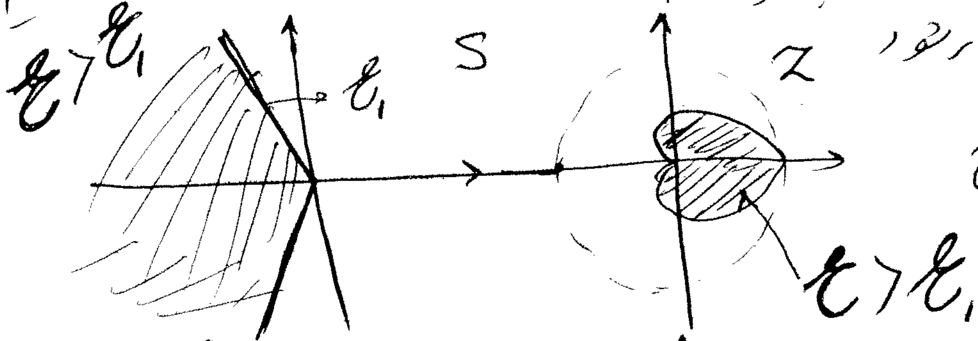
$$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\xi\omega_n}$$ چهار برابر ثابت زمانی

ضریب ξ باید طوری باشد که نه فراجهش زیاد داشته و نه خیلی کند باشد $0.4 < \xi < 0.8$

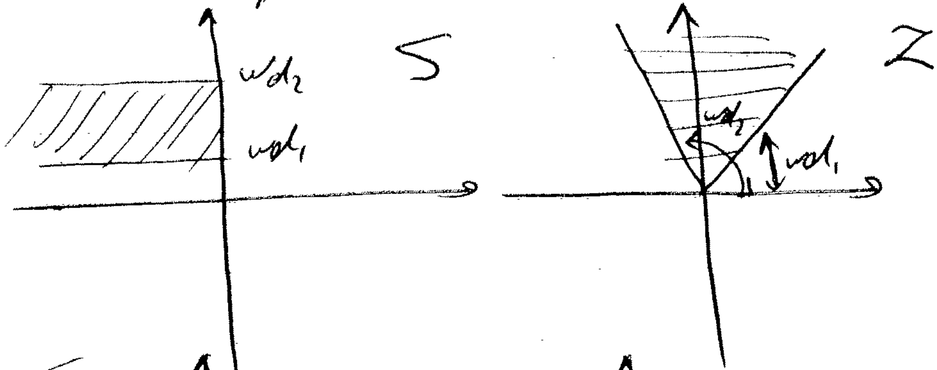
نگاشت از صفحه s به صفحه z

قبلاً نگاشت خطوط نسبت میرایی ثابت، ω_d ثابت و ω_n ثابت را بحث کردیم

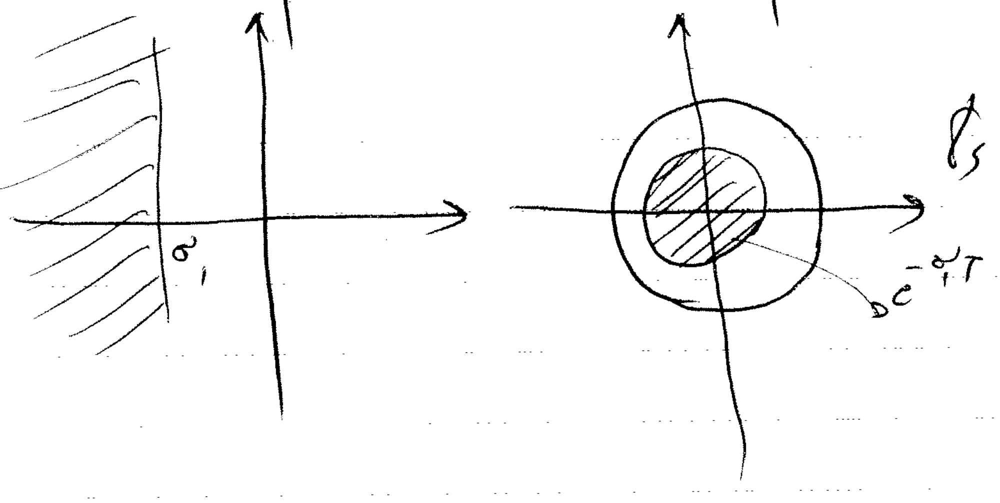
مجدداً آنها اشاره میشود



نسبت میرایی ζ



فرکانس طبیعی میرا شد.



زمان مستقرشدن σ

Subject:
Year	Month	Date

ارتباط میان محل قطبها و صفرهای صفحه Z و پاسخ گذرا

در زمان گسسته از راست تا شرط نایکوئیست برآورده شود یعنی $\omega_s > 2\omega_1$

۱۱ اگر این شرط برآورده نشود، قطبها تکرار گردد $s = -\sigma_1 \pm j(\omega_1 \pm n\omega_s)$ ، $n = 1, 2, 3, \ldots$

$n = 1 \quad s = -\sigma_1 \pm j(\omega_1 - \omega_s)$

یعنی در صورت تداخل فرکانس نوسانات با فرکانس $\omega_s - \omega_1$ یا $k\omega_s - \omega_1$ خواهیم داشت

در صورت رعایت شرط نایکوئیست

فرض کنید

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots a_n} = \frac{b_0 z^n + \cdots b_n}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}$$

ورودی را ضربه فرض کنیم، $C(z)$ را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\Rightarrow C(z) = a_0 + \sum \frac{a_n z}{z-p_n} + \sum_i \frac{\beta_i z e^{-a_i T} \sin \omega_i T}{z^2 - 2e^{-a_i T} z \cos \omega_i T + e^{-a_i T}}$$

$$+ \sum \frac{\gamma_j z (z - e^{-a_j T} \cos \omega_j T)}{z^2 - 2e^{-a_j T} z \cos \omega_j T + e^{-a_j T}} + \left[\frac{z}{(z-p)^2}, \frac{z(z+p)}{(z-p)^3} + \cdots \right]$$

قطبهای $C(z)$ توسط ضرایب $a_1, a_2, \ldots, a_n$ و قطبهای ورودی $R(z)$ تعیین می‌شود.

جدولهای ۲-۵ تا ۴-۵ نمایش شکل موج خروجی به ازای محلهای مختلف قطبها را نشان می‌دهد

Subject :

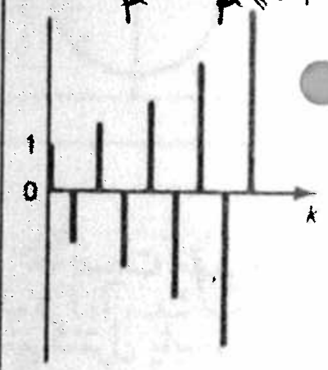
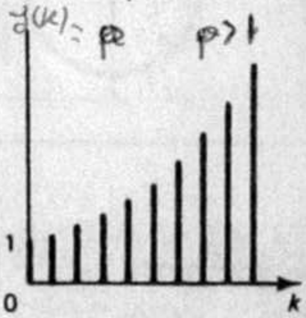
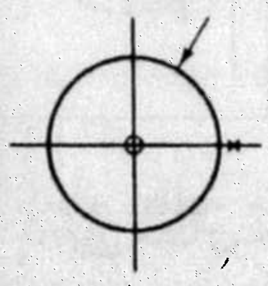
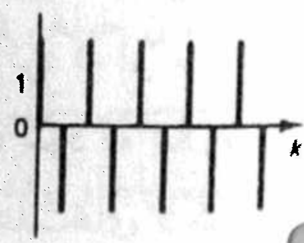
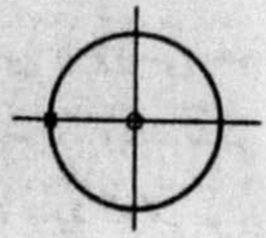
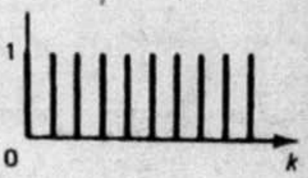
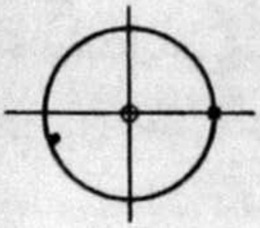
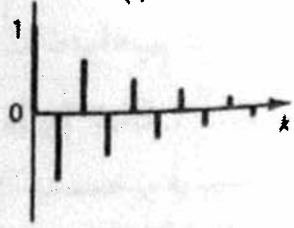
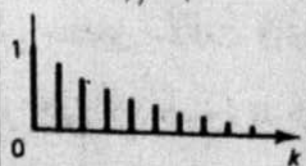
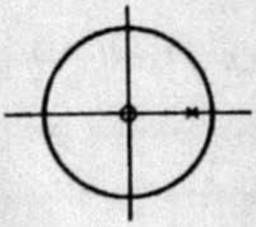
Year . Month . Date .

V4

جدول ۴-۳ نمایشهای ترسیمی عکس تبدیل z $z/(z-p)$

$$\frac{z}{z-p} = \mathcal{Z}[p^k]^{-1} \quad (\text{قطب ساده} = p) \qquad [p^{k-1}]$$

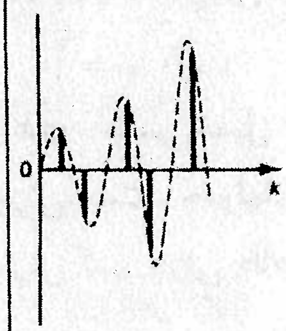
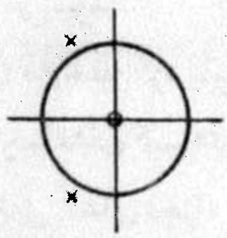
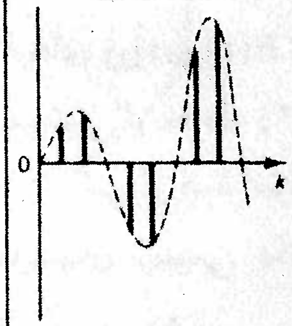
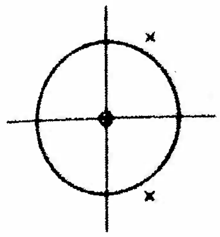
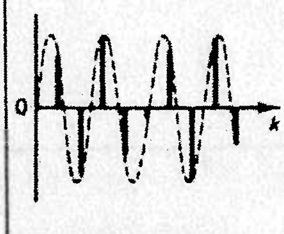
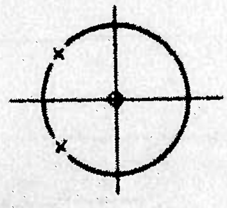
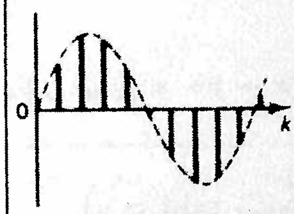
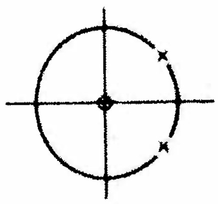
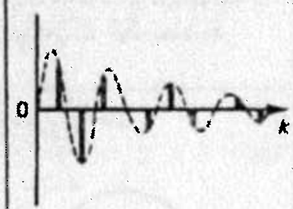
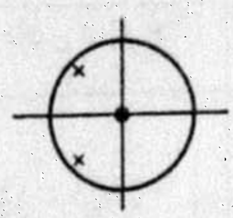
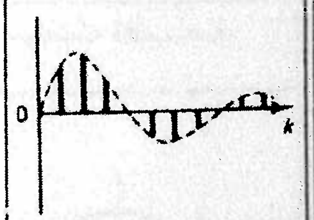
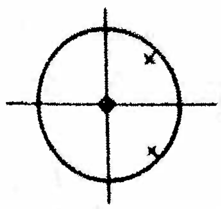
$$\frac{z^{-1}}{1-pz^{-1}} = \frac{z}{z-p}$$

عکس تبدیل z	موقعیت قطب‌صفر	عکس تبدیل z	موقعیت قطب‌صفر
p^{k-1} $p<-1$ 	 قطب خارج دایره	$y(k)=p^{k-1}$ $p>1$ 	دایره واحد  قطب خارج دایره
		$p=1$ 	
$-1<p<0$ 		$0<p<1$ 	

جدول ۴-۴ نمایشهای ترسیمی عکس تبدیل z

$ze^{-aT}\sin\omega T/[z^2 - 2e^{-aT}z\cos\omega T + e^{-2aT}]$

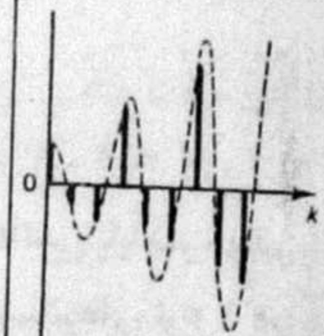
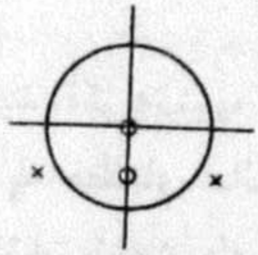
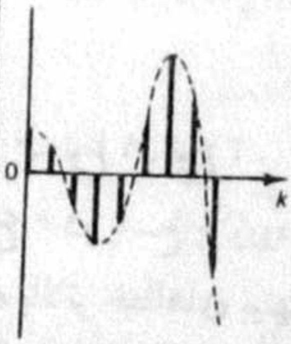
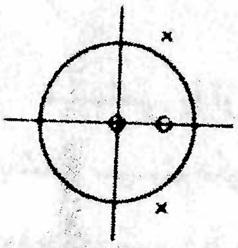
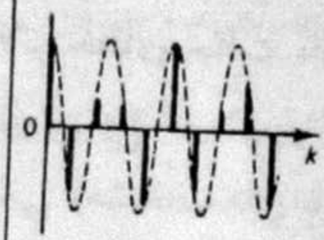
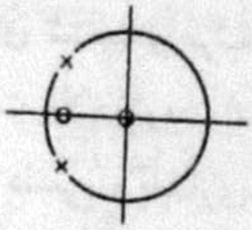
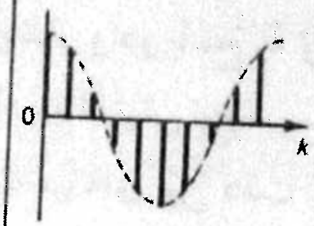
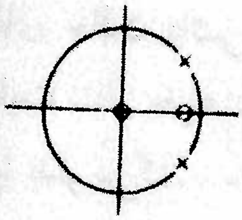
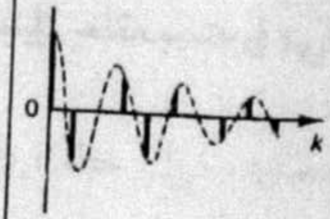
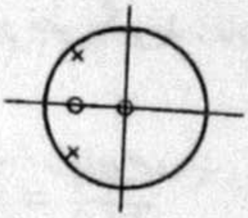
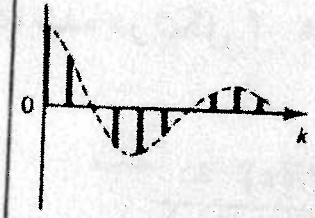
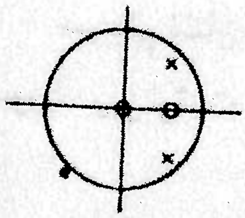
$$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2 - 2e^{-aT}z\cos\omega T + e^{-2aT}} = \mathcal{Z}[e^{-akT}\sin\omega kT]$$

عکس تبدیل z	موقعیت قطب‌صفر	عکس تبدیل z	موقعیت قطب‌صفر
			
			
			

جدول ۴-۵ نمایشهای ترسیمی عکس تبدیل z

$z(z-e^{-aT}\cos\omega T)/[z^2-2e^{-aT}z\cos\omega T+e^{-2aT}]$

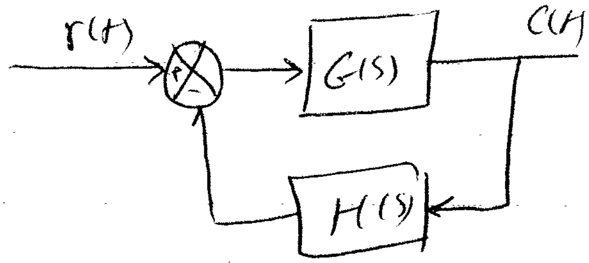
$$\frac{z(z-e^{-aT}\cos\omega T)}{z^2-2e^{-aT}z\cos\omega T+e^{-2aT}}=\mathcal{Z}[e^{-akT}\cos\omega kT]$$

عکس تبدیل z	موقعیت قطب‌ـصفر	عکس تبدیل z	موقعیت قطب‌ـصفر
			دایره واحد 
			
			

تحلیل خطای حالت دائمی (سیستمهای کنترل زمان پیوسته)

خطای دائمی ناشی از عدم توانایی سیستم برای تعقیب انواع ورودیها

(خطای دائمی همچنین می‌تواند ناشی از اشکالات موجود در اجزای سیستم باشد)



فرض کنید تابع حلقه باز سیستم بصورت زیر باشد

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{s^N(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)}$$

نوع ۰ $N=0$
نوع ۱ $N=1$
نوع ۲ $N=2$

جمله s^N در مخرج نشان دهنده قطب مضاعف از رتبه N در مبدا است

سیستم را برحسب تعداد انتگرالگیری در تابع حلقه باز دسته‌بندی می‌کنند

نوع ۰ نسبت به ورودی پله خطای محدود و ورودی شیب خطای بینهایت

نوع ۱ " " " خطای صفر " " " محدود

نوع ۲ " صفر " " " "

با افزایش نوع دقت بالا می‌رود اما پایداری را بدتر می‌کنند

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \rightarrow \frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)H(s)}{R(s)}$$

$$= \frac{1}{1+G(s)H(s)} \longrightarrow E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0}\left[s \times \frac{1}{1+G(s)H(s)} \times R(s)\right] = \frac{1}{1+G(0)H(0)}$$

Subject:
Year. Month. Date.

ثابت خطای وضعیت استاتیکی $= K_p = \lim\limits_{s\to 0} G(s)H(s) = G(0)H(0)$

برای ورودی پله $e_{ss} = \dfrac{1}{1+K_p}$

ثابت خطای سرعت استاتیکی: $e_{ss} = \lim\limits_{s\to 0}\left[\dfrac{s}{1+G(s)H(s)} \times \dfrac{1}{s^2}\right]$ ورودی شیب

$= \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{1}{sH(s)G(s)}$

$K_v = \lim\limits_{s\to 0} sH(s)G(s)$

$e_{ss} = \dfrac{1}{K_v}$ خطای حالت ماندگار برای ورودی شیب

ثابت خطای شتاب استاتیکی $\quad r(t) = \frac{1}{2}t^2(t)\quad$ ورودی شتاب

$e_{ss} = \lim\limits_{s\to 0}\left[\dfrac{s}{1+G(s)H(s)} \times \dfrac{1}{s^3}\right] = \lim\limits_{s\to 0}\left[\dfrac{1}{s^2G(s)H(s)}\right]$

$K_a = \lim\limits_{s\to 0} s^2 G(s)H(s)$

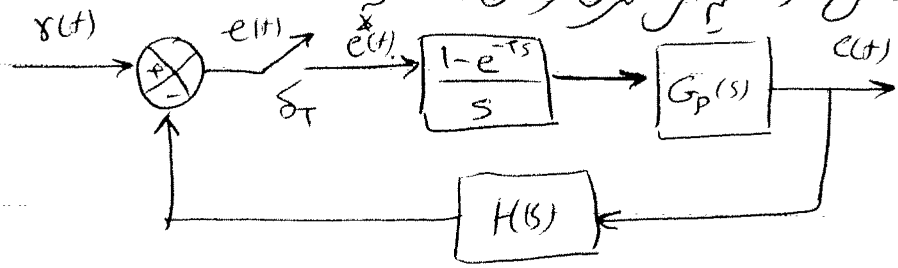
$e_{ss} = \dfrac{1}{K_a}$ خطای حالت ماندگار برای ورودی شتاب

سیستم	خطای حالت ماندگار برای ورودی		
	ورودی پله $r(t)=1$	ورودی شیب $r(t)=t$	ورودی شتاب $r(t)=\frac{1}{2}t^2$
نوع ۰	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
نوع ۱	0	$1/K_v$	∞
نوع ۲	0	0	$\frac{1}{K_a}$

Subject:

Year. Month Date.

تحلیل خطاهای حالت دائمی در سیستم‌های کنترل زمان گسسته



$$e(t) = r(t) - b(t) \qquad e^*_{ss} = \lim_{t\to\infty} e^*(t) = \lim_{k\to\infty} e(kT) = \lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})E(z)\right]$$

$$G(z) = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left[\frac{G_p(s)}{s}\right] \qquad GH(z) = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left[\frac{G_p(s)H(s)}{s}\right]$$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+GH(z)} \rightarrow E(z) = R(z) - B(z) = R(z) - GH(z)E(z)$$

$$E(z) = \frac{1}{1+GH(z)}R(z)$$

$$e^*_{ss} = \lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})\frac{1}{1+GH(z)}R(z)\right]$$

$$R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

ثابت خطای موقعیت استاتیکی

$$e^*_{ss} = \lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})\frac{1}{1+GH(z)}\times\frac{1}{1-z^{-1}}\right] = \lim \frac{1}{1+GH(z)}$$

$$K_p = \lim_{z\to 1} GH(z) \rightarrow e^*_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$$

خطای حالت دائمی به ورودی پله زمانی صفر است که $K_p = \infty$ باشد یعنی $GH(z)$ باید حداقل یک قطب در $z=1$ داشته باشد.

$r(t) = t\,1(t)$ ورودی شیب

ثابت خطای سرعت استاتیکی

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \Rightarrow e^*_{ss} = \lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})\frac{1}{(1+GH(z))}\times\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{T}{(1-z^{-1})GH(z)} \qquad K_v = \lim_{z\to 1}\frac{(1-z^{-1})GH(z)}{T}$$

$$e^*_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

ثابت خطای شتاب استاتیکی

$r(t) = \frac{1}{2} t^2 u(t)$

$$R(z) = \frac{T^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^3}$$

$$e_{ss}^* = \lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})\frac{1}{1+GH(z)} \times \frac{T^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^3}\right]$$

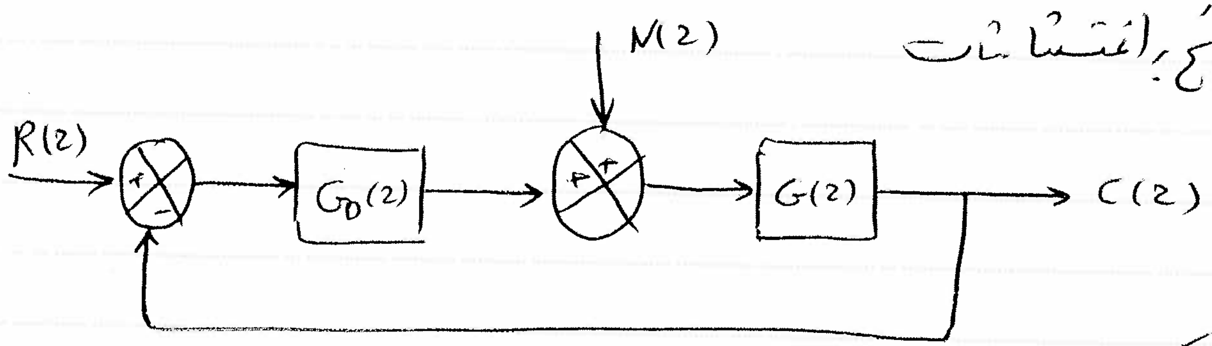
$$= \lim_{z\to 1} \frac{T^2}{(1-z^{-1})^2 GH(z)} \rightarrow K_a = \lim_{z\to 1} \frac{(1-z^{-1})^2 GH(z)}{T^2}$$

$$e_{ss}^* = \frac{1}{K_a}$$

از نتایج کسب شده حالت پیوسته اینطور نتیجه گرفت که نوع سیستم در حالت گسسته بستگی به تعداد قطب در $z=1$ ایجاد شود

تابع تبدیل حلقه باز: $= \frac{1}{(z-1)^N} \times \frac{A(z)}{B(z)}$

پاسخ به اغتشاشات



فرض کنید $R(z)=0$

$$\frac{C(z)}{N(z)} = \frac{G(z)}{1+G_D(z)G(z)}$$

اگر $G_D(z)G(z) \gg 1$ باشد

$$\frac{C(z)}{N(z)} \approx \frac{1}{G_D(z)}$$

$$, E(z) = R(z) - C(z) = -C(z)$$

$$C(z) = \frac{N(z)}{G_D(z)} \longrightarrow E(z) = \frac{-N(z)}{G_D(z)}$$

اگر $G_D(z)$ قطبی در $z=1$ داشته باشد در این صورت خطای حالت دائمی ناشی از اغتشاش ثابت صفر است

$$e_{ss} = \lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})E(z)\right] = \lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})\frac{-N(z)}{G_D(z)}\right]$$

اگر نویز ثابت باشد $N(z) = \frac{N}{1-z^{-1}} \rightarrow e_{ss} = -\lim_{z\to 1}\left[\cancel{(1-z^{-1})} \times \frac{N}{\cancel{1-z^{-1}}} \times \frac{1}{G_D(z)}\right]$

$$= -\lim \left(\frac{N}{G_D(z)}\right)$$

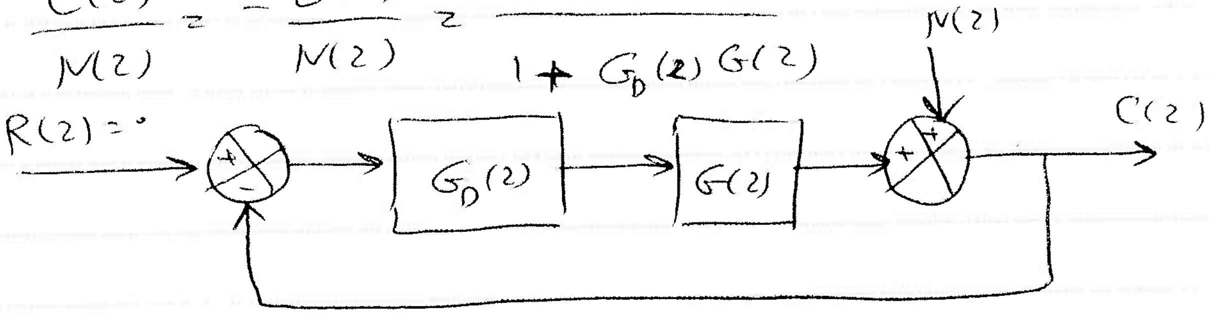
اگر $G_D(z) = \frac{\hat{G}_D(z)}{z-1} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\hat{G}_D(z)$

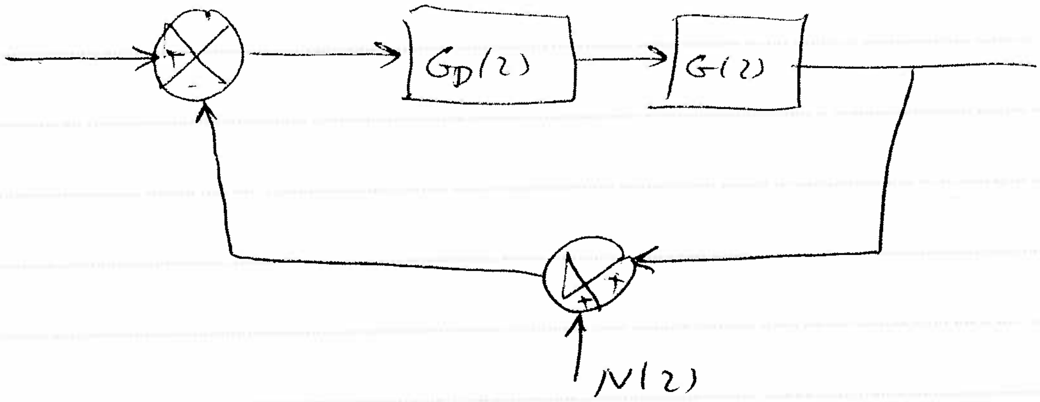
$G(z)$ قطبی در $z=1$ نداشته باشد

Subject:
Year. Month. Date.

توجه کنید نقطه‌ای که اغتشاش در آن وارد سیستم می‌شود در تنظیم ضریب بهره $G_D(z)G(z)$ بسیار مهم است

$$\frac{C(z)}{N(z)} = -\frac{E(z)}{N(z)} = \frac{1}{1+G_D(z)G(z)}$$





$$\frac{C(z)}{N(z)} = -\frac{E(z)}{N(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1+G_D(z)G(z)}$$

Root Locus method — طراحی بر اساس روش مکان ریشه‌ها

روش مشابه سیستم‌های پیوسته است با این تفاوت که شرط پایداری تغییر می‌کند

$$1+G(z)H(z)=0$$ معادله تحلیل مکان ریشه

یا $$1+GH(z)=0$$

$$1+F(z)=0 \quad \begin{cases} F(z)=G(z)H(z) \\ F(z)=GH(z) \end{cases}$$

$$F(z)=-1 \rightarrow \begin{cases} \angle F(z)=\pm 180^\circ(2k+1) \\ |F(z)|=1 \end{cases}$$

مقادیری از z که هر دو شرط زاویه و اندازه را برآورده کند باید ریشه‌های معادله مشخصه یا قطبهای حلقه بسته هستند.

قواعد کلی ساختن مکان ریشه

۱- نخست معادله مشخصه $1+F(z)$ را باید بسط داده و به شکل زیر مرتب کنیم

$$1+\frac{K(z+z_1)(z+z_2)\cdots(z+z_m)}{(z+p_1)(z+p_2)\cdots(z+p_n)} \qquad K>0$$ ضریب بهره

۲- نقاط شروع و نقاط پایانی مکان ریشه را بیابید

نقاط آغازین $K=0$ قطبهای حلقه باز و $K=\infty$ صفرهای حلقه باز

اگر تعداد قطب و صفر برابر نباشد $n-m$ مجانب خواهیم داشت

۳- مکان ریشه‌ها را روی محور حقیقی تعیین کنید که نقطه‌ای روی محور حقیقی در نظر بگیرید اگر تعداد کل قطبها و صفرهای حقیقی در سمت راست این نقطه فرد باشد روی مکان هندسی است در ~~غیر اینصورت نیست~~

Subject:
Year. Month. Date.

۴- مجانبهای مکان ریشه را تعیین کنید. با شروع برقراری شرط فاز

$$\text{زاویه مجانبها} = \frac{\pm 180(2N+1)}{n-m} \qquad N=0,1,2,\dots$$

$n =$ تعداد قطبهای پایدار $F(z)$

$m =$ تعداد صفرهای پایدار $F(z)$

محل مجانبها که یکدیگر را روی محور حقیقی قطع می‌کنند.

$$-\sigma_a = -\frac{(P_1+P_2+\dots P_n)-(Z_1+Z_2+\dots Z_m)}{n-m}$$

۵- نقاط برشکست و درشکست

این نقاط معمولاً بر روی محور حقیقی هستند، به صورت جفتهای مختلط در نوع pole ظاهر شوند

- اگر مکان ریشه‌ها میان دو قطب حلقه باز جای در روی محور حقیقی قرار گرفته باشد در این صورت میان این دو قطب لااقل یک نقطه برشکست وجود دارد.

- اگر مکان ریشه‌ها میان دو صفر جای در (اگر ممکن است در ∞ باشد) قرار گیرد لااقل یک نقطه درشکست میان آن دو صفر خواهد بود.

- اگر مکان ریشه میان یک قطب و یک صفر حلقه باز روی محور حقیقی قرار گیرد ممکن است هیچ نقطه برشکست درشکست وجود نداشته باشد یا هر دو وجود داشته باشد.

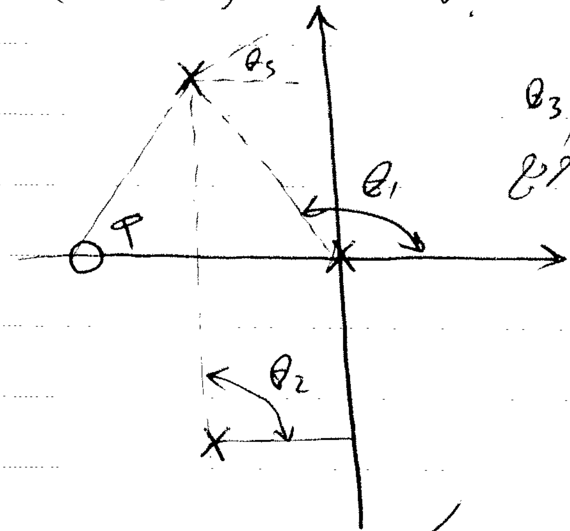
$$1 + F(z) = 0$$

$$1 + K\frac{B(z)}{A(z)} = 0 \qquad K = -\frac{A(z)}{B(z)}$$

$$\frac{dK}{dz} = -\frac{A'(z)B(z) - A(z)B'(z)}{B^2(z)} = 0$$

مقدار K حتماً باید مثبت باشد.

۶- زاویه خروج (یا زاویه ورود) مکان ریشه از قطبهای مختلط (یا صفرهای مختلط) را تعیین کنید.



$\theta_3 = 180° - (\theta_1 + \theta_2 + \Phi)$

زاویه خروج

۷- نقاطی را که در آن مکان ریشه محور انگاری را قطع می‌کند بیابید

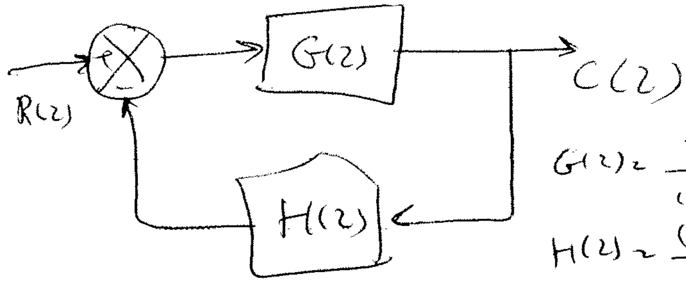
متغیر $z = j\omega$ را در معادله $K = -\dfrac{A(z)}{B(z)}$ جایگزین می‌کنیم و $z = j\omega$

ضریب موهومی آن را برابر صفر قرار داده مقدار ω و با جایگزینی مقدار K را بدست می‌آوریم

۸- هر نقطه روی مکان ریشه یک قطب حلقه بسته احتمالی است. یک نقطه خاص وقتی قطب حلقه بسته خواهد بود که مقدار ضریب بهره K شرط اندازه را برآورده کند.

$|F(z)| = 1 \qquad \left|\dfrac{(z+z_1)(z+z_2)\cdots(z+z_n)}{(z+p_1)(z+p_2)\cdots(z+p_n)}\right| = \dfrac{1}{K}$

حذف شدن قطبهای $G(z)$ با صفرهای $H(z)$. اگر سیستم حلقه بسته تشکیل
زیر باشد و صفر $H(z)$ با قطب
$G(z)$ مشترک باشد از تابع $H(z)G(z)$
حذف شد. (ا)ز قطب سیستم حلقه بسته موجود است

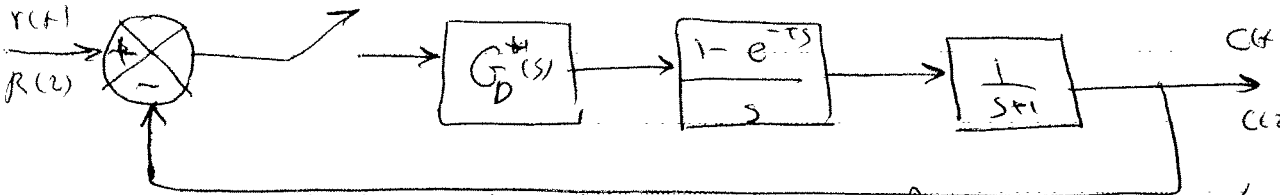


$$G(z)=\frac{z+c}{(z+a)(z+b)}$$

$$H(z)=\frac{(z+a)}{z+d}$$

$$\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+G(z)H(z)}=\frac{(z+c)(z+d)}{(z+a)\left[(z+b)(z+d)+z+c\right]}$$

دیاگرام های بلوکی سیستم کنترل دیجیتال



فرض کنید کنترل کننده انتگرال گیر باشد

$$G_D(z)=\frac{K}{1-z^{-1}}=K\frac{z}{z-1}$$

$$Z\left[G_h(s)\,G_p(s)\right]=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\times\frac{1}{s+1}\right]$$

$$=(1-z^{-1})\,Z\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]$$

$$=(1-z^{-1})\,Z\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right]$$

$$=\frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-T}}\right)=\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

$$G(z)=G_D(z)\,Z\left[G_h(z)\,G_p(z)\right]=\frac{Kz}{z-1}\times\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

$$T=0.5$$

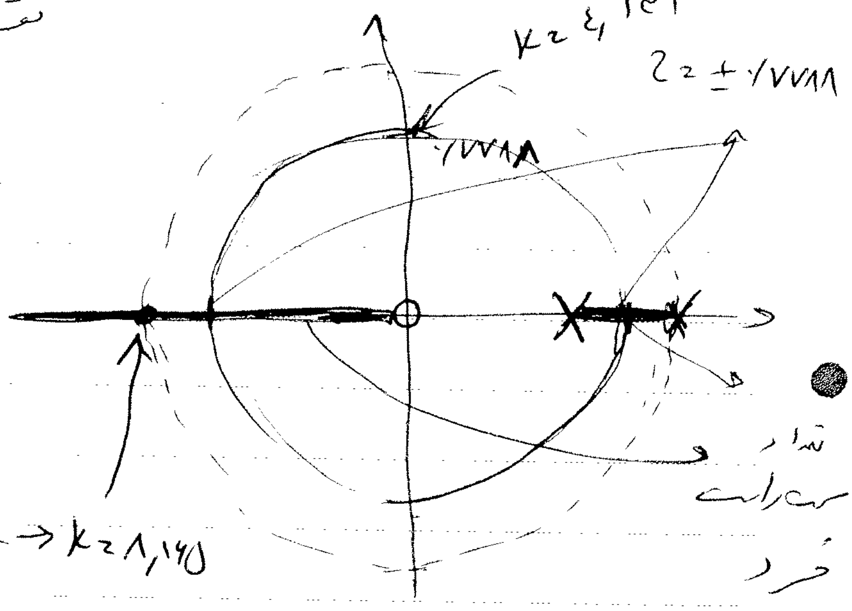
$$1+G(z)=0 \qquad G(z)=\frac{K\times 0.3935\,z}{(z-1)(z-0.6065)}$$

Subject :
Year . Month Date .

$$K = -\frac{(z-1)(z-0.6065)}{0.3935\,z} \rightarrow \frac{dK}{dz} = \frac{z^2-0.6065}{0.3935\,z^2} = 0$$

$z_1 = -0.7788$, $z_2 = 0.7788 \rightarrow K_2 = 0.1244$ نقطه شکست

$\rightarrow K_1 = 8.041$ نقطه شکست



$$\left|\frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}\right| = \frac{1}{K}$$

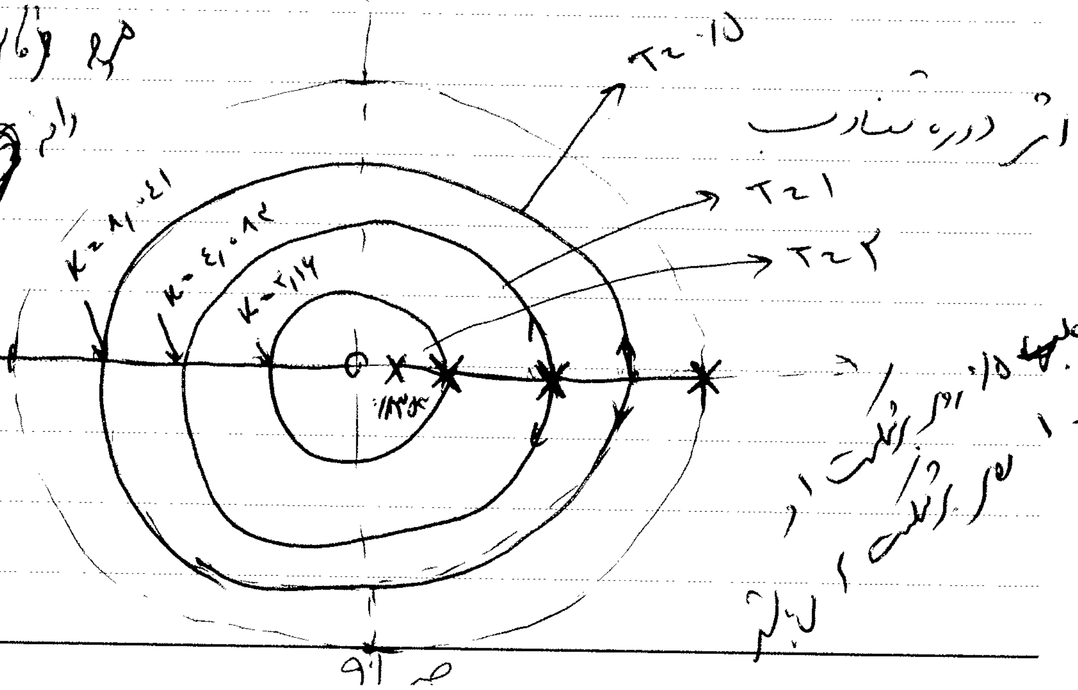
$T = 0.5$, $z = -1$

$$\left|\frac{0.3935\,(-1)}{(-2)(-1.6065)}\right| = \frac{1}{K} \rightarrow K = 8.165$$

محل تقاطع با محور موهومی $z = jv$ قرار داده و ضریب موهومی را

$$\frac{0.3935 \times jv}{(jv-1)(jv-0.6065)} = \frac{1}{K}$$ را صفر قرار می‌دهیم

$\rightarrow v = \pm 0.7788 \rightarrow K = 4.241$



اثرات دوره تناوب نمونه برداری T بر مشخصه های پاسخ گذرا

افزایش دوره تناوب نمونه برداری T پایداری سیستم کنترل زمان گسسته را کمتر می‌کند.

کاهش دوره تناوب سبب می‌شود سیستم گسسته شبیه پیوسته رفتار نماید.

۴-۶) طراحی بر اساس روش پاسخ فرکانسی

مفاهیم دقیق پاسخ فرکانسی همانند سیستم پیوسته است.

بحث بررسی دو مقدار دامنه و فاز بوده چرا که در صورت برگردانشدن شرایط فرکانس حفظ می‌شود.

پاسخ سیستم زمان گسسته خطی تغییرناپذیر با زمان به ورودی سینوسی

پاسخ فرکانسی $G(z)$ از روی با جایگزینی $z = e^{j\omega T}$ در $G(z)$ بدست آورد

$$u(t) = \sin\omega t \rightarrow u(k) = u(kT) = \sin k\omega T$$

$$U(z) = \mathcal{Z}[\sin k\omega T] = \frac{z\sin\omega T}{(z-e^{j\omega T})(z-e^{-j\omega T})}$$

پاسخ سیستم $X(z)$ برابر خواهد بود

$$X(z) = G(z)\times U(z)$$

$$= G(z)\times \frac{z\sin\omega T}{(z-e^{j\omega T})(z-e^{-j\omega T})} = \frac{az}{z-e^{j\omega T}} + \frac{\bar a z}{z-e^{-j\omega T}} + [\text{جملات ناشی از قطبهای } G(z)]$$

با ضرب دو طرف معادله در $\frac{z-e^{j\omega T}}{z}$ داریم

$$G(z)\times\frac{\sin\omega T}{z-e^{-j\omega T}} = a + \frac{\bar a (z-e^{j\omega T})}{z-e^{-j\omega T}} + \frac{z-e^{j\omega T}}{z}[\text{جملات ناشی از قطبهای } G(z)]$$

با میل دادن $z \rightarrow e^{j\omega T}$ جملات دوم و سوم به سمت صفر میل می‌کند

$$G(e^{j\omega T})\times\frac{\sin\omega T}{e^{j\omega T}-e^{-j\omega T}} = a \rightarrow a = G(e^{j\omega T})\times\frac{1}{2j}$$

به همین ترتیب با ضرب مشابه $\bar a$ هم بدست می‌آید

$$\bar a = G(e^{-j\omega T})\times\frac{-1}{2j}$$

اگر فرض کنیم

$$G(e^{j\omega T}) = Me^{j\theta}$$

$$\rightarrow G(e^{-j\omega T}) = Me^{-j\theta}$$

$$X(z) = \frac{Me^{j\theta}}{2j} \times \frac{z}{z-e^{j\omega T}} - \frac{Me^{-j\theta}}{2j} \times \frac{z}{z-e^{-j\omega T}} + [\text{جملات ناشی از قطبهای } G(z)]$$

$$= \frac{M}{2j}\left(\frac{e^{j\theta} z}{z-e^{j\omega T}} - \frac{e^{-j\theta}}{z-e^{-j\omega T}}\right) + [\text{جملات ناشی از قطبهای } G(z)]$$

$$\rightarrow x(kT) = \underbrace{\frac{M}{2j}\left(e^{jk\omega T} \times e^{j\theta} - e^{-jk\omega T} \times e^{-j\theta}\right)}_{\text{حالت پایدار}} + \underbrace{Z^{-1}[\text{جملات ناشی از قطبهای } G(z)]}_{\text{حالت گذرا}}$$

$$x_{ss}(kT) = \frac{M}{2j}\left[e^{j(k\omega T+\theta)} - e^{-j(k\omega T+\theta)}\right] = M \sin(k\omega T + \theta)$$

$$M = M(\omega) = |G(e^{j\omega T})|$$

$$\theta = \theta(\omega) = \angle G(e^{j\omega T})$$

$$x_{ss}(kT) = |G(e^{j\omega T})| \times \sin(k\omega T + \angle G(e^{j\omega T}))$$

$G(e^{j\omega T})$ را تابع تبدیل پالس سینوسی می‌گویند

مثال سیستمی با معادله زیر را در نظر بگیرید

$$x(kT) = u(kT) + a\,x((k-1)T)$$

که در آن $u(kT)$ ورودی و $x(kT)$ خروجی است $\qquad u(kT) = A\sin k\omega T$

خروجی حالت دائمی $x(kT)$ را بدست آورید

$$X(z) = U(z) + a z^{-1} X(z) \qquad G(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$G(e^{j\omega T}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega T}} = \frac{1}{1-a\cos\omega T + ja\sin\omega T}$$

$$|G(e^{j\omega T})| = M = \frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega T}} \qquad \angle G(e^{j\omega T}) = -\tan^{-1}\frac{a\sin\omega T}{1-a\cos\omega T}$$

$$x_{ss}(kT) = AM\sin(k\omega T + \theta)$$

$$= \frac{A}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega T}} \times \sin\left(k\omega T - \tan^{-1}\frac{a\sin\omega T}{1-a\cos\omega T}\right)$$

تبدیل دو خطی صفحه w

با توجه به اینکه $z = e^{j\omega T}$ پاسخ فرکانسی در صفحه z لگاریتمی ندارد.

$z = \dfrac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}$ بنابراین آن را از صفحه z به صفحه w می‌بریم

$w = \dfrac{2}{T}\dfrac{z-1}{z+1}$ $\qquad (-1, 0, 1)\,z \longleftarrow \left(\frac{j\omega_s}{2}, 0\right) \leftarrow s$

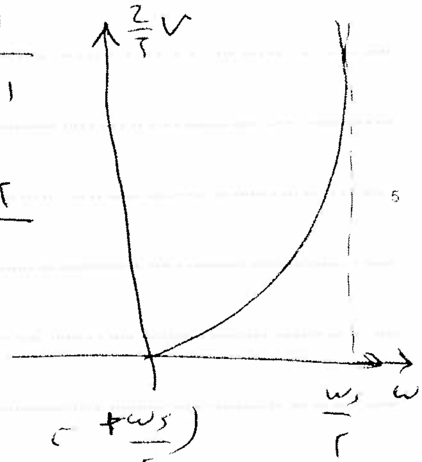
$w \longleftarrow w\,(0, \infty)$

$(+\infty \leftarrow w \rightarrow -\infty) \Leftarrow \left(\frac{j\omega_s}{2} \leftarrow s \rightarrow -\frac{j\omega_s}{2}\right)$ اختلاف s

اگر چه صفحه w از لحاظ هندسی شبیه صفحه s است اما محور فرکانس اعوجاج پیدا کرده است

$$w\Big|_{w=jv} = jv = \frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1}\Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{2}{T}\,\frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1}$$

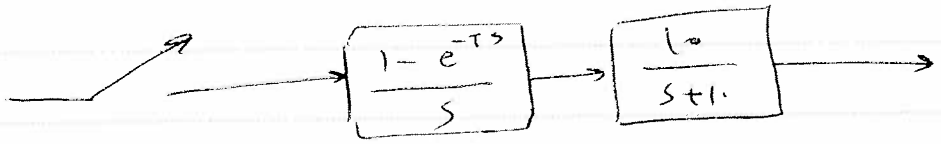
$$= \frac{2}{T}\,\frac{e^{j\frac{\omega T}{2}}-e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{e^{j\frac{\omega T}{2}}+e^{-j\frac{\omega T}{2}}} = \frac{2}{T}\,j\tan\frac{\omega T}{2}$$



$$(-\infty,+\infty) \rightarrow v = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2} \quad \left(-\frac{\omega_s}{2}, +\frac{\omega_s}{2}\right)$$

اگر ωT خیلی کوچک باشد $\omega \simeq v$

مثال



$$T=0.1 \rightarrow G(w)=?$$

$$G(z)=\mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\times\frac{10}{s+10}\right]=\frac{0.6321}{z-0.3679}$$

$$z=\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}=\frac{1-0.05w}{1+0.05w} \rightarrow G(w)=9.241\,\frac{1-0.05w}{w+9.241}$$

$$|G(j\omega)|_{\omega\to\infty}=0$$

$$|G(jv)|_{v\to\infty}=?$$

$$\left|G\left(j\frac{\omega_s}{2}\right)\right|$$

قطب‌های $G(w)$ و $G(s)$ تا حدی شبیه هم هستند

صفرها اما اگر $T\rightarrow 0$ شبیه یکدیگر می‌شوند

مزایای روش دیاگرام بودی در طراحی

۱- محاسبه فرکانس پایین شعن اندازه در دیاگرام بودی نشان داده شده یکی از شاخصهای خطای استاتیکی K_p ، K_v ، K_a است

۲- مشخصه‌های پاسخ گذرا را می‌توان به صورت مشخصه‌های فرکانسی برحسب حاشیه فاز - حاشیه بهره - پهنای باند و ... تبدیل کرد

۳- طراحی یک جبران کننده دیجیتال (یا کنترل دیجیتال) به منظور برآورده کردن مشخصات داده شده را می‌توان با یک روش ساده و سرراست در دیاگرام بودی انجام داد.

phase lag phase lead

جبران سازی پیش‌افت فاز، پس‌افت فاز، پس‌افت - پیش‌افت فاز

پیش‌افت فاز: بهبود حد پایداری - سبب افزایش پهنای باند - افزایش سرعت سیستم در پاسخ گذرا

عیب: در بعضی مسائل نویزی فرکانس بالا ناشی از ضریب بهره افزایش یافته

پس‌افت فاز: کاهش ضریب بهره در فرکانس‌های بالا، کاهش پهنای باند سیستم، کاهش سرعت پاسخ گذرا - امکان افزایش ضریب بهره فرکانس پایین - کاهش خطای ماندگار

PD پیش‌افت فاز

PI پس‌افت فاز

Subject:
Year. Month. Date.

در کنترل کننده پیش فاز چون قطب و صفر بهم نزدیک هستند دقت ضرایب کنترل کننده مهم می‌شود.

روش طراحی در صفحه w

۱- گفت: $G(z)$، تبدیل z دستگاهی را که یک نگهدار قبل از آن قرار دارد، بدست آورید سپس تبدیل دوخطی $G(w)$ را حساب نمایید

$$z = \frac{1+(T/2)w}{1-(T/2)w}$$

$$G(w) = G(z)\Big|_{z=\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}}$$

۲- $w=j\nu$ را در $G(w)$ جایگزین کنید و دیاگرام بودی $G(j\nu)$ را رسم کنید

توجه شود $\boxed{\nu_b = \frac{1}{T}\tan\frac{\omega_b T}{2}}$

۳- از دیاگرام بودی ثابتهای خطای استاتیکی، حاشیه فاز و حد بهره را بخوانید

۴- با فرض اینکه بهره فرکانس پایین تابع تبدیل $G_D(w)$ کنترل کننده واحد باشد بهره سیستم را با برآوردن شرایط ثابت خطای استاتیکی داده شده تعیین کنید سپس با بکار بردن روشهای طراحی معمول قطبها و صفرها را تعیین کنید.

۵- از طریق تبدیل دوخطی $w = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$، $G(w)$ را به $G(z)$ تبدیل کنید

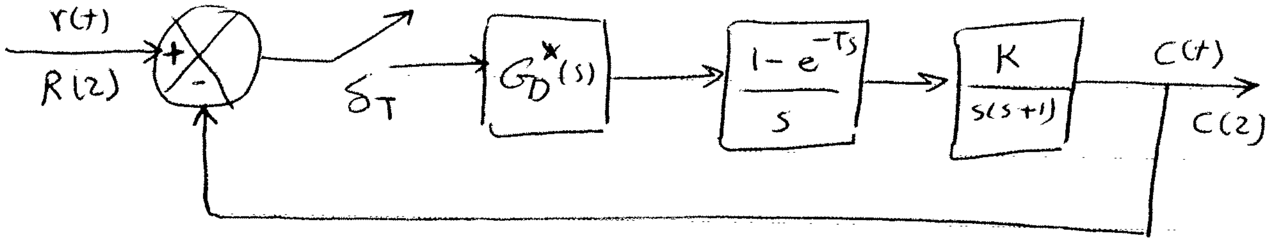
$$G_D(z) = G(w)\Big|_{w=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

۶- تابع تبدیل پالس $G_D(z)$ را با یک الگوریتم محاسباتی تحقق دهید.

Subject:
Year: Month: Date:

مثال ۴_۱۲

سیستم کنترل دیجیتال نشان داده شده در شکل ~~[illegible]~~ را در نظر بگیرید. یک کنترل کننده دیجیتال در صفحه w طراحی کنید، بطوری که حد فاز مساوی ۵۰° حداقل حد بهره برابر 10db (که باعث برای ζ قطبهای حلقه بسته غالب در حدود ۰/۵ متناظر است) و ثابت خطای سرعت استاتیکی K_v برابر ۲/s باشد $T = 0/2$



$$G(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-0/2s}}{s} \times \frac{K}{s(s+1)}\right] = 0/01873 \times \left[\frac{K(z+0/9356)}{(z-1)(z-0/8187)}\right]$$

$$z = \frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w} = \frac{1+0/1w}{1-0/1w} \rightarrow G(w) = \frac{K\left(\frac{w}{300/6}+1\right)\left(1-\frac{w}{10}\right)}{w\left(\frac{w}{0/997}+1\right)}$$

$$G_D(w) = \frac{1+\frac{w}{\alpha}}{1+\frac{w}{\beta}} \rightarrow G_D(w)G(w) = \frac{\left(1+\frac{w}{\alpha}\right)K\left(\frac{w}{300/6}+1\right)\left(1-\frac{w}{10}\right)}{\left(1+\frac{w}{\beta}\right) \times w\left(\frac{w}{0/997}+1\right)}$$

$$K_v = \lim_{w \to 0} w\, G_D(w)G(w) = 2 \rightarrow \boxed{K = 2}$$

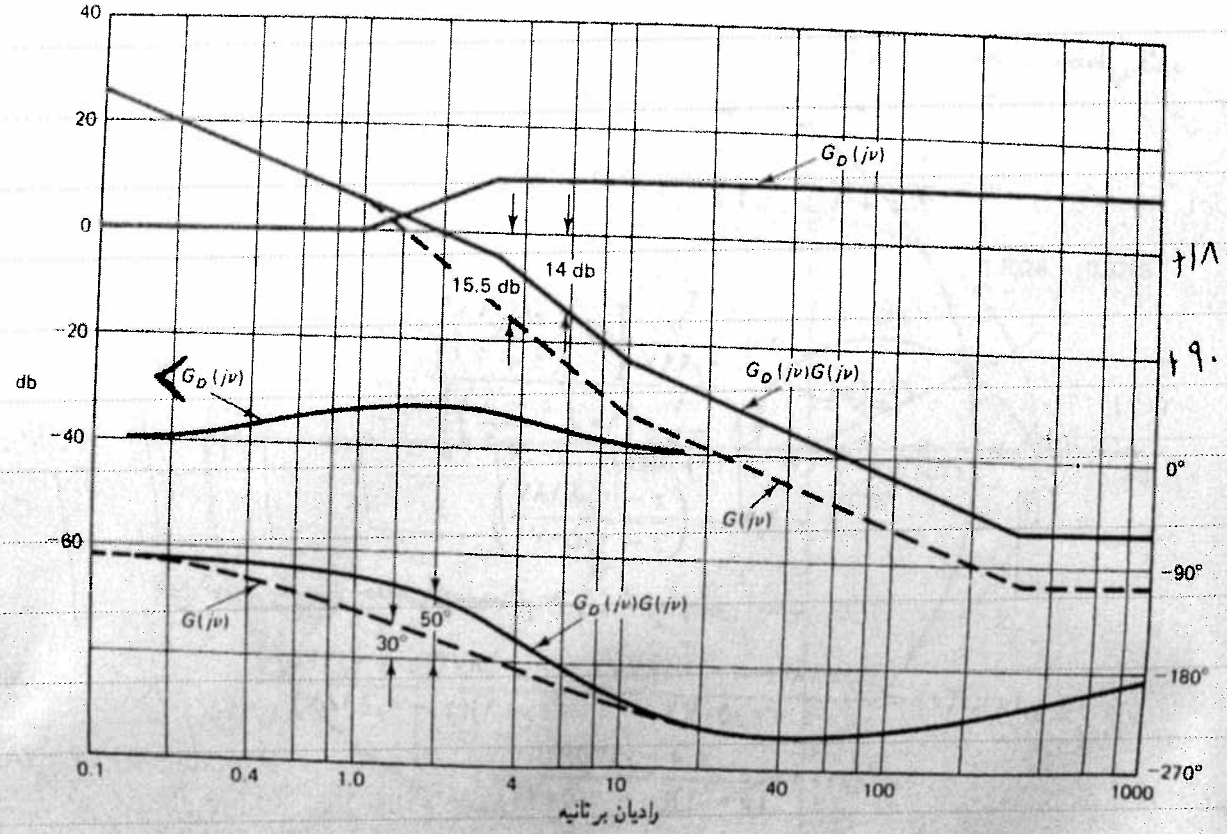
و از دیاگرام بود حد فاز ۵۰° حد بهره 15,5 db است

با به حد فاز ۵۰° تغییر داده شود لازم است ناحیه صفر در ۰/۹۹۷ قرار گیرد

که در این صورت حد فاز ۱۸ درجه خواهد بود که باید ۳۲° اضافه شود برای این منظور قطب در ۳/۴۷ قرار داده شود

$$G_D(w) = \frac{1+\frac{w}{0/997}}{1+\frac{w}{3/47}} \qquad (4-64)$$

Subject:
Year. Month. Date.



تابع تبدیل کنترل کننده داده شده با معادله (۴-۶۴) اکنون توسط تبدیل دوخطی داده شده با معادله (۴-۶۲) باردیگر به صفحه z تبدیل خواهد شد:

$$w = \frac{۲}{T}\frac{z-۱}{z+۱} = \frac{۲}{۰/۲}\frac{z-۱}{z+۱} = ۱۰\frac{z-۱}{z+۱}$$

از این رو

$$G_D(z) = \frac{۱+\frac{۱}{۰/۹۹۷}\left[۱۰\left(\frac{z-۱}{z+۱}\right)\right]}{۱+\frac{۱}{۳/۲۷}\left[۱۰\left(\frac{z-۱}{z+۱}\right)\right]}$$
$$= ۲/۷۱۸\left(\frac{z-۰/۸۱۸۷}{z-۰/۵۰۷۱}\right)$$

تابع تبدیل پالسی حلقه‌باز سیستم جبران شده چنین است

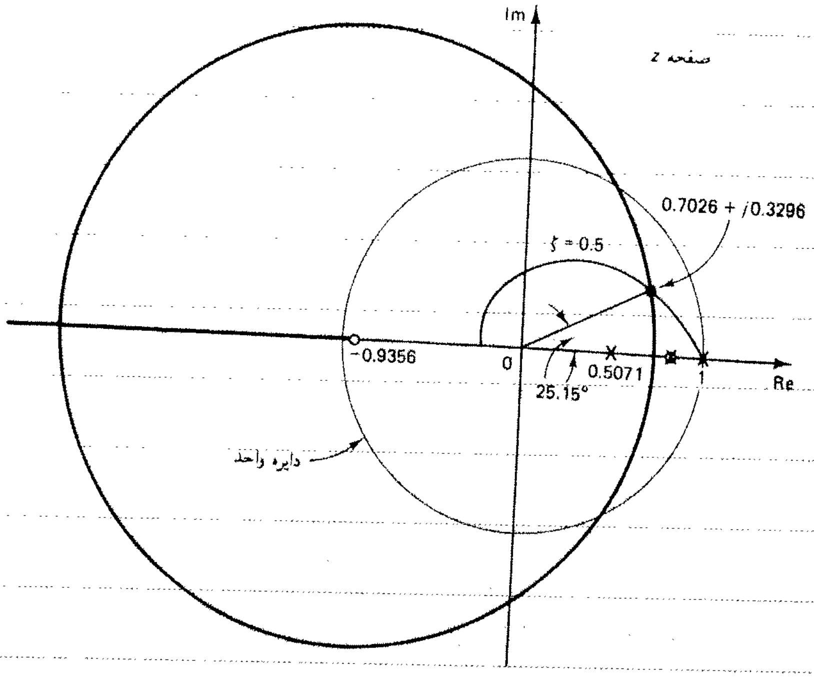
$$G_D(z)G(z) = \frac{۲/۷۱۸(z-۰/۸۱۸۷)}{z-۰/۵۰۷۱}\,\frac{۲\times ۰/۰۱۸۷۳(z+۰/۹۳۵۶)}{(z-۱)(z-۰/۸۱۸۷)}$$
$$= ۰/۱۰۱۸\frac{z+۰/۹۳۵۶}{(z-۱)(z-۰/۵۰۷۱)}$$

تابع تبدیل پالسی حلقه‌بسته سیستم طراحی شده چنین است

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{۰/۱۰۱۸(z+۰/۹۳۵۶)}{(z-۱)(z-۰/۵۰۷۱)+۰/۱۰۱۸(z+۰/۹۳۵۶)}$$
$$= \frac{۰/۱۰۱۸(z+۰/۹۳۵۶)}{(z-۰/۷۰۲۶+j۰/۳۲۹۶)(z-۰/۷۰۲۶-j۰/۳۲۹۶)}$$

از این معادله اخیر می‌بینیم که قطبهای حلقه‌بسته در محلهای زیر قرار دارند

$$z = ۰/۷۰۲۶\pm j۰/۳۲۹۶$$



شکل۴-۵۰ منحنی مکان ریشه برای سیستم طراحی شده در مثال ۴-۱۳.

نکات مهم درباره طراحی در صفحه w

۱- اندازه و زاویه فاز $G(jv)$ برابر اندازه و زاویه فاز $G(z)$ است که در آن z بر روی دایره واحد از $z=1$ تا $z=-1$ تغییر می‌کند چون $z=e^{j\omega T}$ مقدار ω از ۰ تا $\omega_s/2$ تغییر می‌کند با توجه به رابطه $v=\frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$ ، ω از ۰ تا ... تغییر می‌کند در نتیجه v از ۰ تا بی‌نهایت متغیر خواهد بود.

۲- معیار پایداری نایکوئیست و مفهوم حد فاز و حد بهره را می‌توان بر $G(jv)$ اعمال کرد.

۳- توابع $G(w)$ و $G(s)$ را مقایسه کنید، به علت حضور ضریب مقیاس $2/T$ در تبدیل w ثابتهای خطای استاتیکی مشابه برای $G(w)$ و $G(s)$ یکسان می‌شوند

۴- تبدیل w، یک یا تعداد بیشتری صفر در نیم صفحه راست در $G(w)$ به وجود می‌آورد، به همین دلیل یک تابع غیرمینیمم فاز است. محل این صفر در فرکانس نمونه‌برداری واقع است با کوچک شدن پریود نمونه‌برداری اثر این صفرها کمتر می‌شود

Subject:

Year. Month. Date.